TD 27 correction
Intégration

Exercice 7

1. On pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ dans J_n. Alors $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$, et les bornes vont de $\frac{\pi}{2}$ à 0 (dans cet ordre !) d'où
$$J_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t$$
C'est classique pour un changement de variables décroissant : les bornes sont dans le mauvais sens mais la différentielle fait apparaitre un signe moins et on peut le remettre dans l'ordre…

   Ensuite $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$. On déduit donc $J_n = I_n$.

2. On majore sous l'intégrale : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t) \leqslant 1$$
puis on intègre l'inégalité :
$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t}_{I_{n+1}} \leqslant \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t}_{I_n}$$
Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. On écrit $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et on intègre par parties I_{n+2} :
$$\begin{aligned} u(t) &= \cos^{n+1}(t) & u'(t) &= -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \\ v'(t) &= \cos(t) & v(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$
d'où
$$I_{n+2} = \Big[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
Le crochet s'annule car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(0) = 0$ et il reste
$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$
Mais à cause de la relation $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, alors
$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t$$
Ainsi $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ soit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

4. Si n est pair on déduit :
$$I_n = I_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \frac{n-1}{n}$$
et on calcule facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Écrivons $n = 2p$. Dans ce produit le dénominateur est
$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p \times 1 \times 2 \times \cdots \times p = 2^p p!$$
Au numérateur c'est
$$1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1) = \frac{(2p)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$$
et donc

$$I_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$$

Si n est impair alors

$$I_n = I_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$$

et on calcule facilement $I_1 = 1$. Alors, si on pose $n = 2p+1$, le numérateur est

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p p!$$

et le dénominateur est

$$3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1) = \frac{(2p+1)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$$

d'où

$$I_n = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 8

1. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ donc continue, sur un intervalle fermé borné non-vide $[a,b]$, donc par le théorème des bornes, f est bornée.

   Étant $\mathcal{C}^1$ alors f' est continue et le théorème des bornes s'applique de même à f', qui est donc bornée.

   Soit alors $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)| \leqslant M$. Alors comme on a aussi $|\cos(nt)| \leqslant 1$, par produit

   $$\forall t \in [a,b], \quad |f(t)\cos(nt)| \leqslant M$$

   d'où en intégrant avec l'inégalité triangulaire

   $$\left| \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)M$$

   ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Le même argument s'applique pour $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant $|\sin(nt)| \leqslant 1$.
2. La fonction f étant $\mathcal{C}^1$, il est possible d'intégrer par parties dans I_n en dérivant f. On pose (pour $n \geqslant 1$)

   $$u(t) = f(t) \qquad u'(t) = f'(t)$$
   $$v'(t) = \cos(nt) \qquad v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$$

   donc

   $$I_n = \left[\frac{1}{n}\sin(nt)f(t)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \sin(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

   c'est-à-dire

   $$I_n = \frac{1}{n}\Big(\sin(nb)f(b) - \sin(na)f(a) - J_n\Big)$$

   Mais le terme sous la parenthèse reste borné et on divise par n donc tout ceci tend vers 0 pour $n \to +\infty$.
3. Idem, une intégration par parties fait apparaitre $\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ qui est aussi borné.

Exercice 9

1. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elle admet donc des primitives sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$. Supposons $x > 0$, soit G une primitive sur $]0,+\infty[$. Alors G est $\mathcal{C}^1$ et l'intervalle $[x,2x]$ est bien inclus dans $]0,+\infty[$, et donc $F(x) = G(2x) - G(x)$. Par les opérations usuelles, F est $\mathcal{C}^1$.

De même si $x<0$, on prend pour G une primitive sur $]-\infty,0[$ et l'intervalle $[2x,x]$ est bien entièrement inclus dans $]-\infty,0[$ et $F(x)=G(2x)-G(x)$ est bien $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $x\neq 0$. Alors $F(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. On effectue alors soigneusement le changement de variable $u=-t$ sous l'intégrale : les bornes deviennent x et $2x$ (dans le même ordre !), $\mathrm{d}u=-\,\mathrm{d}t$, et $\frac{\cos(t)}{t}=-\frac{\cos(u)}{u}$. Ainsi
$$F(-x)=\int_x^{2x}-\frac{\cos(u)}{u}\times-\,\mathrm{d}u=+\int_x^{2x}\frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u=F(x)$$
donc F est paire.

3. On suppose $x>0$ et comme dans la première question on considère pour G une primitive de $t\mapsto\frac{\cos(t)}{t}$ sur $]0,+\infty[$, alors $F(x)=G(2x)-G(x)$. Alors
$$F'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\times\frac{\cos(2x)}{2t}-\frac{\cos(x)}{x}=\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x}$$
Avec un développement limité à l'ordre 1, $\cos(x)\underset{x\to 0}{=}1+o(x)$ et $\cos(2x)\underset{x\to 0}{=}1+o(x)$ et donc on déduit
$$F'(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{o(x)}{x}=o(1)\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad\lim_{x\to 0}F'(x)=0$$
Si $x<0$, on trouve par parité $F'(x)=-F'(-x)$ et la limite est la même.

4. Le but est de dériver $\frac{1}{t}$ pour faire apparaitre $\frac{1}{t^2}$. On fixe $x>0$ et on pose
$$\begin{array}{ll} u(t)=\dfrac{1}{t} & u'(t)=-\dfrac{1}{t^2}\\ v'(t)=\cos(t) & v(t)=\sin(t)\end{array}$$
Ces quatres fonctions sont bien continues sur l'intervalle d'intégration $[x,2x]$ car $x>0$. Alors
$$F(x)=\left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}-\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
soit
$$F(x)=\frac{\sin(2x)}{2}-\frac{\sin(x)}{x}+\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Les deux premiers morceaux tendent vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, car le sinus reste borné. Pour le dernier il faut utiliser un encadrement : $|\sin(t)|\leqslant 1$ donc $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$ et
$$\left|\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{2x}\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Mais cette dernière se calcule exactement :
$$\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}=\frac{1}{2x}$$
qui tend vers 0 pour $x\to+\infty$. On déduit donc $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. Par parité, on trouve la même limite pour $x\to-\infty$.

5. On part du développement limité à l'ordre 2 pour cos en 0 qu'on divise ensuite par t :
$$\frac{\cos(t)}{t}\underset{t\to 0}{=}\frac{1}{t}-\frac{t}{2}+o(t)$$
Y a-t-il un sens à intégrer cette égalité ? Pour être plus propre, posons
$$g(t)=\frac{\cos(t)}{t}-\frac{1}{t}+\frac{t}{2}$$
qui est une fonction prolongeable par continuité en 0. On peut donc l'intégrer entre x et $2x$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, comme si elle était continue. Alors d'une part pour $x>0$ ou $x<0$

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

soit après calcul

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \ln(2) + \frac{3}{4}x^2$$

D'autre part, on peut écrire

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

mais on démontre dans le théorème du cours « primitiver un DL » que si $g(t) \underset{t\to 0}{=} o(t)$ alors $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = o(x^2)$. Les deux termes ci-dessus sont donc en $o(x^2)$. Ainsi, on a prolongé F par continuité en donnant en plus le développement limité

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$$

et en particulier $\lim_{x\to 0} F(x) = \ln(2)$.

6. Par ce développement limité, le prolongement continu de F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$. Mais par la question 3 c'est bien égal à $\lim_{x\to 0} F'(x)$. Donc le prolongement de F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.