

# TD 26 correction

## Applications linéaires

### Exercice 8

---

Commençons par quelques remarques :

- On a toujours  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ . En effet,  $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$  signifie  $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$  et on a alors  $f(f(\vec{u})) = \vec{0}_E$  donc  $\vec{u} \in \text{Ker}(f^2)$ .
- On a toujours  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ . En effet,  $\vec{v} \in \text{Im}(f^2)$  signifie qu'il existe un  $\vec{u} \in E$  tel que  $\vec{v} = f(f(\vec{u}))$ , et alors  $\vec{v}$  est l'image par  $f$  de  $f(\vec{u})$ .
- Théorème du rang pour  $f$  et pour  $f^2$  :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2))$$

Démontrons alors l'équivalence entre (i) et (ii) :

Supposons (i) :  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Alors  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$  et on déduit par la formule ci-dessus  $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$ . Mais sachant déjà  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$  on en déduit alors l'égalité  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$  (théorème de l'égalité automatique quand on a une inclusion entre deux sous-espaces vectoriels de même dimension). Ceci montre (ii).

De même, supposons (ii) :  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ . Par le même raisonnement on déduit tout de suite  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$  et sachant qu'on a déjà une inclusion  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  alors c'est une égalité  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Ceci montre (i).

Il reste à démontrer l'équivalence par exemple avec (iii), par exemple entre (i) et (iii).

Supposons (i), montrons (iii). Soit un vecteur  $\vec{u} \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ . Alors d'une part  $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$ . D'autre part il existe un  $\vec{v} \in E$  tel que  $\vec{u} = f(\vec{v})$ . Alors  $f(\vec{u}) = f(f(\vec{v}))$ . Ceci montre que  $\vec{v} \in \text{Ker}(f^2)$ . Par l'hypothèse (i), alors  $\vec{v} \in \text{Ker}(f)$ . Et donc  $\vec{u} = f(\vec{v}) = \vec{0}_E$ . Cela démontre (iii).

Supposons (iii), montrons (i). On doit démontrer l'égalité d'ensembles  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ , et l'inclusion  $\subset$  est toujours vraie donc il faut démontrer l'autre. Soit donc  $\vec{u} \in \text{Ker}(f^2)$ . Alors l'élément  $f(\vec{u})$  est à la fois dans  $\text{Ker}(f)$  et dans  $\text{Im}(f)$ , donc par l'hypothèse (iii), alors  $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$ . Cela signifie que  $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$ , donc on a démontré  $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ .

### Exercice 9

---

1. Il s'agit de montrer que pour deux polynômes  $P$  et  $Q$ , et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ . En effet :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(\alpha_0), \dots, (\lambda P + Q)(\alpha_n)) \\ &= (\lambda P(\alpha_0) + Q(\alpha_0), \dots, \lambda P(\alpha_n) + Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) + (Q(\alpha_0), \dots, Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

2. Soit  $P \in \text{Ker}(\varphi)$ . Cela signifie que  $P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n)$ , ainsi les  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  forment  $n + 1$  racines de  $P$  deux à deux distinctes, mais  $P$  est de degré au plus  $n$ , donc  $P$  est le polynôme nul ! Ainsi  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ .
3. L'application  $\varphi$  est linéaire injective de  $E$  vers  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Or  $E$  est aussi de dimension  $n + 1$ . Donc  $\varphi$  est automatiquement bijective (conséquence du théorème du rang : la dimension de l'image est égale à  $n + 1$ , donc c'est tout  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Cela signifie précisément le théorème de Lagrange : pour tout  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P \in E$  tel que  $\forall 0 \leq i \leq n, P(\alpha_i) = \beta_i$ .
4. (a) Si  $j \neq i$  alors le calcul de  $L_i(\alpha_j)$  fait intervenir un terme nul dans le produit, et donc automatiquement  $L_i(\alpha_j) = 0$ . Mais si  $j = i$  alors par définition  $L_i(\alpha_j) = 1$  (c'est un quotient de deux produits égaux).  
(b) Posons  $P = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$ . Par définition, à cause de la question précédente, dans le calcul de  $P(\alpha_j)$  un seul terme est non-nul et  $P(\alpha_j) = \beta_j \times L_j(\alpha_j)$  soit  $P(\alpha_j) = \beta_j$ . Par unicité, c'est bien le polynôme  $P$  qu'on cherche.