

TD 25 correction

Développements limités

Exercice 1

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Exercice 3

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$$

$$\arctan(x \cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{89}{120}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 6

$$\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 4}{=} \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{1}{64}(x-4)^2 - \frac{1}{256}(x-4)^3 + o((x-4)^3)$$

$$e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right)$$

Exercice 8

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 9

$$\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)$$

Exercice 10

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \underset{x \rightarrow 1}{=} 2 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{7}{24}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Exercice 11

C'est exactement la même démonstration que pour les polynômes. Le point clé (au-delà d'écrire la définition de fonction paire ou impaire) est le théorème d'unicité des coefficients d'un développement limité, qui permet les méthodes d'identification des coefficients.

Exercice 13

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^9)$$

Exercice 14

- Standard (tableau de variations, limites, théorème de la bijection, et f^{-1} est alors automatiquement impaire).
On a besoin de $f'(x) > 0$ pour justifier que f^{-1} est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et donc admet un DL.
- D'une part

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

D'autre part, on pose $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} \alpha_1 y + \alpha_3 y^3 + \alpha_5 y^5 + o(y^5)$ (avec des coefficients $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer) et on identifie les coefficients dans $f^{-1}(f(x)) = x$, qu'on calcule comme une composée :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(f(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \alpha_1 x + (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + \left(\frac{1}{2}\alpha_1 + 3\alpha_3 + \alpha_5\right)x^5 + o(x^5) \\ &= x \end{aligned}$$

On trouve alors $\alpha_1 = 1$ puis $\alpha_3 = -1$ puis $\alpha_5 = \frac{5}{2}$:

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + o(y^5)$$

Exercice 15

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x(1 - \cos(x))} &= \frac{2}{3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} \right)^n &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Exercice 16

Un développement limité à l'ordre 3 convient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

En $x = 0$ il y a donc une tangente d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$ et le terme de position par rapport à la tangente est $\frac{1}{48}x^3$: donc c'est un point d'inflexion, au voisinage de 0, f est au-dessus de sa tangente pour $x > 0$ et en-dessous pour $x < 0$.

Exercice 17

- f_1 Comme suggéré, si $x > 0$,

$$f_1(x) = \frac{+x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+2h}$$

en posant $h = \frac{1}{x}$. Un développement limité à l'ordre 2 convient pour $\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+2h}$, qu'on divise ensuite par h :

$$f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - 2 + \frac{9}{2} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a alors une asymptote d'équation $y = x - 2$, et le terme de position par rapport à l'asymptote est $\frac{9}{2} \times \frac{1}{x}$: f est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$.

En $-\infty$ on trouve l'opposé (à cause de $\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ si $x < 0$) :

$$f_1(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x + 2 - \frac{9}{2} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc f a une asymptote d'équation $y = -x + 2$ et le terme de position est encore positif (car $x < 0$) donc f est au-dessus de l'asymptote.

- On écrit comme suggéré

$$f_2(x) = x \exp\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = x \exp\left(1 - \frac{2}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)$$

puis on pose $h = \frac{1}{x}$, c'est alors une composition assez standard. On a besoin d'un développement limité à l'ordre au moins 2 pour $1 - \frac{2h}{1+h}$ et pour l'exponentielle, qu'on va diviser par h à la fin. On trouve, en $+\infty$ comme en $-\infty$:

$$f_2(x) = ex - 2e + \frac{4e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc une asymptote d'équation $y = ex - 2e$, et un terme de position $\frac{4e}{x}$ donc f est au-dessus de l'asymptote pour $x \rightarrow +\infty$ et en dessous pour $x \rightarrow -\infty$.

Exercice 18

- f_1 C'est une composition assez standard, on calcule

$$\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^5) \quad \text{avec} \quad u = \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

On trouve :

$$\sin(\arctan(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5)$$

- f_2 C'est un quotient, mais il faut partir d'un développement limité à l'ordre 4 en haut et en bas car on va simplifier une fois par x :

$$\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$

On est ramené à un quotient standard, pour lequel il faut calculer

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \quad \text{avec} \quad u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

et enfin multiplier par le numérateur $1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$. On trouve

$$\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

- f_3 On écrit $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$. Il faut partir d'un développement limité à l'ordre 4 du \ln puisqu'ensuite on le divise par x :

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

et on tombe alors sur une composition mais avec l'exponentielle au voisinage 1, il faut donc calculer

$$\exp(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} e \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \right) \quad \text{avec} \quad u \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

On trouve :

$$(1+x)^{1/x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$$

- f_4 La formule $\tan(a+b)$ combinée avec la valeur $\tan(\pi/4)$ donne pour h au voisinage de 0

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}$$

C'est alors un quotient assez standard, on a besoin deux fois du développement limité de \tan à l'ordre 3 seulement en $h = 0$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1 + h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{1 - h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)}$$

qui se calcule comme un quotient, notamment avec

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \quad \text{avec} \quad u = -h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)$$

puis produit par le numérateur $1 + h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ et on trouve :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

- f_5 C'est une composée pour laquelle on a besoin du développement limité de e^x à l'ordre 3 en $x = 0$. On tombe alors sur le développement limité de \ln mais en 2, il faut donc factoriser par 2 sous le \ln :

$$\ln(1 + e^x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$$

Effectivement, $f_5(0) = \ln(2)$. On doit alors calculer

$$\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

On trouve donc

$$\ln(1 + e^x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$$

Exercice 19

1. Standard avec un tableau de variations. On a besoin de savoir $f'(x) > 0$ pour conclure que f^{-1} est \mathcal{C}^∞ et donc admet un DL à tout ordre. Au passage f impaire, donc f^{-1} aussi ; on calcule $f'(0) = 1$.
2. On pose $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} \alpha_1 y + \alpha_3 y^3 + \alpha_5 y^5 + o(y^5)$ (on sait déjà $\alpha_1 = 1/f'(0) = 1$), et on calcule d'autre part

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

Il faut alors identifier les coefficients dans l'équation $f^{-1}(f(x)) = x$, qu'on calcule comme le DL d'une composée, qui donne

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \alpha_1 x + \left(\frac{\alpha_1}{6} + \alpha_3\right)x^3 + \left(-\frac{\alpha_1}{120} + \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5\right)x^5 + o(x^5) \\ & = x \end{aligned}$$

et on trouve $\alpha_1 = 1$ puis $\alpha_3 = -\frac{1}{6}$ puis $\alpha_5 = \frac{11}{120}$. En résumé

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{11}{120}y^5 + o(y^5)$$

Exercice 20

D'abord, on sait déjà que f est \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

On considère alors un DL à l'ordre 2 pour l'exponentiel, d'où on calcule le DL à l'ordre 1 pour f en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

Cela montre d'un seul coup qu'on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et qu'on a alors $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Il reste à comparer à comparer $f'(0)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ où on calcule

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

Mais là encore avec un DL à l'ordre 2 en haut et en bas on trouve $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$: donc c'est bien égal à $f'(0)$ et f' est continue sur \mathbb{R} .

On a donc prolongé f de façon \mathcal{C}^1 à \mathbb{R} en posant $f(0) = 1$.