TD 22 correction
Continuité

Exercice 10

1. On fixe $a \in I$. Puis on fait tendre $x \to a$. L'inégalité $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$ montre directement qu'alors $f(x) \to f(a)$. Donc f est continue en a, et ceci pour tout $a \in I$.
2.
   - Soit $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ une fonction affine. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$|f(x) - f(y)| = |\alpha| \times |x - y|$$
   La condition $(*)$ est donc vérifiée si et seulement si $|\alpha| < 1$.
   - Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$|f(x) - f(y)| = |x + y| \times |x - y|$$
   La condition $(*)$ ne peut donc pas être vérifiée sur $\mathbb{R}$ (par l'absurde, on aurait alors $|x + y| \leqslant k$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mais on peut les prendre aussi grands qu'on veut).
   - Soif $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2$,
   $$|f(x) - f(y)| = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$
   en effet $\sqrt{x} \geqslant 1$ et $\sqrt{y} \geqslant 1$ donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 2$. La condition $(*)$ est donc vérifiée avec $k = 1/2$.
3. (a) Supposons qu'il existe c et d tels que $f(c) = c$ et $f(d) = d$. En appliquant $(*)$ avec c et d alors directement
   $$|c - d| \leqslant k|c - d|$$
   ce qui est absurde si $c \neq d$ et $0 < k < 1$.

   (b) Par récurrence : si pour un n on a $|u_n - c| \leqslant k^n|u_n - c|$ alors
   $$\left|u_{n+1} - c\right| = |f(u_n) - c| \leqslant k \times |u_n - c| \leqslant k \times k^n|u_n - c| = k^{n+1}|u_n - c|$$
   Comme $0 < k < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$ et donc (gendarmes, en valeur absolue) $\lim_{n\to+\infty} u_n = c$.

Exercice 11

Faire des dessins.

1. (a) Soit $A \in \mathbb{R}$. Par la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > b$, $f(x) > A$. De même par la définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < a$, $f(x) > A$. Sur $[a, b]$, on peut alors bien appliquer le théorème des bornes : f admet un minimum m. Ce sera alors automatiquement un minimum global... À la condition qu'on ait pris A assez grand pour que $[a, b]$ soit non-vide et que les valeurs $f(x) > A$ vérifient aussi $f(x) \geqslant m$. On peut par exemple prendre $A = f(0) + 1$.

   Alors on a bien :
   - Si $x \in [a, b]$ alors $f(x) \leqslant m$,
   - Sinon $f(x) > A$, mais $0 \in [a, b]$ donc $m \leqslant f(0) < A$ donc $f(x) \geqslant m$.

   (b) Soit $P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ un polynôme de degré pair ($a_n \neq 0$). Alors comme d'habitude, $P(x)$ est équivalent à $a_n x^n$ pour $x \to \pm\infty$. Donc, connaissant le comportement de x^n pour n pair :
   - Si $a_n > 0$: P vérifie l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, donc admet un minimum global.
   - Si $a_n < 0$: P vérifie $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, donc quitte à appliquer le cas précédent à $-P$, alors P admet un maximum global.
2. (a) Montrons d'abord que f est bornée. On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$: il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que si $x > b$ alors $|f(x)| < 1$, et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que si $x < a$ alors $|f(x)| < 1$. Et on peut appliquer le théorème des bornes sur $[a, b]$ (on peut toujours l'agrandir pour qu'il soit non-vide) : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $f(x) \leqslant M$. Alors sur $\mathbb{R}$, f est majorée par $\mathrm{Max}(1, M)$.

Montrons ensuite que f admet au moins un minimum ou un maximum. Si f est constante, alors f est nulle, et c'est bien le cas. Sinon, il y a au moins une valeur non-nulle, t tel que $f(t) \neq 0$. Supposons par exemple $f(t) > 0$, on applique alors la définition de limite avec $\varepsilon = f(t)/2$, et comme précédement on fabrique un intervalle $[a, b]$ tel que $f(x) < \varepsilon$ si $x < a$ ou si $x > b$. Alors un maximum sur $[a, b]$, où on peut appliquer le théorème des bornes, est automatiquement un maximum global.

(b) Oui : par exemple $f : x \mapsto e^{-x^2}$ tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$, a bien un maximum global en 0 mais pas de minimum global.

(c) Le même raisonnement montre que f est encore bornée : si on suppose $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell'$ alors on trouver un intervalle $[a, b]$ tel que $|f(x) - \ell| < 1$ si $x > b$ et $|f(x) - \ell'| < 1$ si $x < a$, et par le théorème des bornes $|f(x)| \leqslant M$ si $a \leqslant x \leqslant b$. Par inégalité triangulaire, les deux premières inégalités donnent $f(x) \leqslant 1 + |\ell|$ et $f(x) \leqslant 1 + |\ell'|$. Alors f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Max}(1 + \ell, 1 + \ell', M)$.

Par contre f peut n'avoir ni minimum ni maximum : par exemple la fonction arctangente, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec des limites $-\pi/2$ en $-\infty$ et $+\pi/2$ en $+\infty$!