

# TD 18 correction

## Polynômes

**Exercice 10.** Pauline Ôme.

**Exercice 11.** 1. •  $n = 0$  : on pose  $P_0(x) = 1$ .

- Si on a  $P_n$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)(1+x^2)^{-(n+1)}$  alors, dérivant comme un produit, on trouve

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x) \times (1+x^2)^{-(n+1)} - (n+1)P_n(x) \times 2x \times (1+x^2)^{-(n+2)} \quad (1)$$

ce qui se ré-écrit aussi

$$f^{(n+1)}(x) = \left( \underbrace{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}_{P_{n+1}(x)} \right) (1+x^2)^{-(n+2)} \quad (2)$$

2. On démontre aisément par récurrence que  $P_n$  est de degré inférieur ou égal à  $n$  :  $P_0$  est bien de degré 0, et si  $P_n$  est de degré inférieur à  $n$  alors ci-dessus d'un côté  $P_n'$  est de degré inférieur à  $n-1$ , donc  $(1+x^2)P_n'(x)$  est de degré inférieur à  $n+1$  ; de l'autre côté  $xP_n(x)$  est de degré inférieur à  $n+1$ . La somme est donc de degré inférieur à  $n+1$  aussi.

3. La formule pour  $P_{n+1}$  est une somme de deux polynômes de même degré. Sans plus d'information sur le coefficient dominant, on ne peut pas conclure sur le degré de la somme...

On doit donc démontrer par récurrence que  $P_n$  est de degré  $n$ , notons  $\alpha_n$  son coefficient dominant. D'abord  $\alpha_0 = 1$ . Et dans la relation définissant  $P_{n+1}$ , si  $P_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$  alors, ne gardant que les coefficients dominants,

$$P_{n+1} = x^2(n\alpha_n x^{n-1} + \dots) - 2(n+1)x(\alpha_n x^n + \dots) \quad (3)$$

Le coefficient de  $x^{n+1}$  est alors  $n\alpha_n - 2(n+1)\alpha_n$  c'est-à-dire  $-(n+2)\alpha_n$ . Ceci ne s'annule pas si  $\alpha_n$  ne s'annule pas.

Cela démontre à la fois que  $P_n$  est bien de degré  $n$ , et que son coefficient dominant vérifie la relation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = -(n+2)\alpha_n$ . On trouve par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (-1)^n (n+1)!$$

**Exercice 12.** 1. D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a^3 + bx^2 + cx + d \quad (4)$$

et d'autre par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad (5)$$

$$= ax^3 - a(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x - a\alpha\beta\gamma \quad (6)$$

L'identification des coefficients donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases} \quad (7)$$

2. On écrit

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \quad (8)$$

qui donne  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$ .

3. On écrit

$$\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \quad (9)$$

qui donne  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}$ .

4. À partir de ce système, on forme le polynôme  $P : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ . Le système (S) est **équivalent** à la condition que  $P$  soit égal à  $x \mapsto (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ , c'est-à-dire que  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  soient les trois racines de  $P$ .

Or on trouve  $P(x) = (x-1)(x-2)^2$ , de racines 1 (simple) et 2 (double). Comme on peut permuter les racines, les solutions pour le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont

$$\left\{ (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) \right\} \quad (10)$$

**Exercice 13.** On fixe  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $x$  est racine multiple alors  $0 = P(x)$  et  $0 = P'(x) = 3x^2 + p$ . Ceci implique  $-p \geq 0$ . Dans le cas  $p \neq 0$ , c'est donc  $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ . On reporte dans  $P$ , on a alors

$$P(x) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad (11)$$

qui est égal à

$$P(x) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad (12)$$

Alors  $P(x) = 0$  si et seulement si  $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = q$ ; élevant au carré des deux côtés on arrive bien à  $-4p^3 = 27q^2$ .

Le cas  $p = 0$  doit être traité à part, en reprenant ci-dessus : la seule racine de  $P'$  serait alors  $x = 0$ , qui est aussi racine de  $P$  si et seulement si  $q = 0$  (c'est alors  $P : x \mapsto x^3$  dont 0 est racine triple). Sous l'hypothèse  $p = 0$  on a donc bien  $q = 0$  si et seulement si  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .