TD 17 correction
Limites de suites

Exercice 13.

- A_n On factorise par 3^n qui domine en haut et en bas :

$$A_n = \frac{3^n}{3^n} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1} \tag{1}$$

- B_n Le terme sin est borné, $|\sin(2^n)| \leqslant 1$, et donc

$$B_n = \frac{1}{2^n} \times \Big(\sin(2^n)\Big)^n \boxed{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \tag{2}$$

(un terme tendant vers 0 multiplié par un terme borné).

- C_n Multipliant en haut et en bas par le conjugué $\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}$ alors

$$C_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \tag{3}$$

- D_n D'abord $\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{3-n}{3} \rfloor$ qu'on encadre

$$\frac{3-n}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{3-n}{3} \right\rfloor \leqslant \frac{3-n}{3} \tag{4}$$

donc

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n} < D_n \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \tag{5}$$

Gendarmes : $\boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}}$.

- E_n Une possibilité : écrire

$$E_n = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \tag{6}$$

Posant $A = \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}$ alors $A \leqslant 1$ et $E_n = \frac{1}{n} \times A$. Gendarmes : donc $\boxed{E_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

- F_n À droite, on multiplie par le conjugué $\sqrt{n^2-1} + n$:

$$\sqrt{n^2-1} - n = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1} + n} = -\frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1} \tag{7}$$

On a donc $F_n \sim -\frac{1}{2n}$. Devant, $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Donc

$$F_n \sim -\frac{1}{2n^2} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \tag{8}$$

- G_n On « force la factorisation »

$$G_n = \frac{\ln\left(n^3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{3\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \tag{9}$$

- H_n Sous la fraction $\frac{2n-1}{2n+1} \to 1$, on peut en fait écrire $\frac{2n-1}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+1}$. Donc :

$$H_n = \exp\left(3n\ln\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)\right) \tag{10}$$

Alors $\ln\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \sim -\frac{2}{2n+1}$ et donc

$$3n\ln\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \sim 3n \times -\frac{2}{2n+1} \longrightarrow -3 \tag{11}$$

Donc $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-3}}$.

- On écrit

$$I_n = n^2 \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \tag{12}$$

Alors $\cos(\frac{1}{n}) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$ (équivalent usuel de cos) puis on applique l'équivalent usuel $\ln(1 + h_n) \sim h_n$ si $h_n \to 0$, en deux étapes dans le bon ordre :

$$\ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2} \tag{13}$$

donc on conclut $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}}$.