TD 15 correction
Géométrie

Exercice 1. Cela revient à poser les deux équations l'une au-dessus de l'autre comme un système (appartenir à l'intersection = vérifier les deux équations simultanément) :

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y-5z=-3 \end{cases} \tag{1}$$

Échelonner, z est libre, $z=t\in\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7\\ 9\\ 0\end{pmatrix}}_{A} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}} \tag{2}$$

On trouve une $\boxed{\text{droite paramétrée}}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ ci-dessus.

Exercice 2. 1. On échelonne et on cherche la condition de compatibilité dans le système d'inconnues (s,t)

$$\begin{cases} s+5t=x \\ s-t=-y+2 \\ 2s-2t=-z+3 \end{cases} \tag{3}$$

C'est $\boxed{2x-4y+3z=1}$.

2. On cherche les deux conditions de compatibilité dans le système d'inconnue t

$$\begin{cases} t=x-5 \\ 2t=y+1 \\ t=-z+3 \end{cases} \tag{4}$$

Ce sont $\boxed{2x-y=11 \text{ et } x+z=8}$.

Exercice 3. On remplace (x,y,z) en fonction de t à droite ce qui donne directement une équation simple pour t. Donc $\boxed{t=7}$ puis on calcule $\boxed{(x,y,z)=(6,11,22)}$: l'intersection est bien un point.

Exercice 4. 1. On nomme les variables différemment : t,t' puis on égale les x,y, ce qui revient au système

$$\begin{cases} 2t-t'=1 \\ -3t+t'=2 \end{cases} \tag{5}$$

On détermine alors $\boxed{t'=-7}$ puis $\boxed{(x,y)=(-5,8)}$: l'intersection est un point.

2. On nomme les variables s,t à gauche et s',t' à droite, puis on égale les deux, ce qui conduit au système à échelonner

$$\begin{cases} s+3t+2s'+3t'=0 \\ 3s+8t+6s'+7t'=1 \\ s+4t+s'+7t'=3 \end{cases} \tag{6}$$

Il y a une variable libre : on pose $t'=\lambda\in\mathbb{R}$, puis on calcule s' (cela suffit !) et on reporte à droite. On trouve alors

$$\boxed{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10\\ -25\\ 6\end{pmatrix}}_{A} + \lambda\underbrace{\begin{pmatrix} -7\\ 19\\ -9\end{pmatrix}}_{\vec{u}}} \tag{7}$$

C'est une $\boxed{\text{droite paramétrée}}$.

Exercice 5. 1. Calcul : on vérifie que (notamment à l'aide de $\cos^2+\sin^2=1$)

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=1 \tag{8}$$
$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=1 \tag{9}$$
$$u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z=0 \tag{10}$$

2. On pose $\vec{w}=(x,y,z)$. Les conditions $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ forment un système linéaire

$$\begin{cases} \cos(\alpha)x-\sin(\alpha)\cos(\beta)y+\sin(\alpha)\sin(\beta)z=0 \\ \sin(\alpha)x+\cos(\alpha)\cos(\beta)y-\cos(\alpha)\sin(\beta)z=0 \end{cases} \tag{11}$$

La combinaison $\cos(\alpha)L_1+\sin(\alpha)L_2=0$ donne directement $x=0$. Il y a une variable libre, par exemple si $z=\lambda$ alors $y=\tan(\beta)z$ (à la condition $\cos(\beta)\neq 0$, sinon choisir plutôt y libre : pour rédiger proprement on a besoin de distinguer les cas mais on a toujours au moins $\cos(\beta)\neq 0$ ou $\sin(\beta)\neq 0$), dans tous les cas on peut écrire l'ensemble des solutions comme

$$(x,y,z)=(0,\lambda\sin(\beta),\lambda\cos(\beta)),\quad \lambda\in\mathbb{R} \tag{12}$$

C'est une droite car le vecteur $(0,\sin(\beta),cos(\beta))$ est toujours non-nul. Parmi toutes ces solutions, exactement deux vérifient la condition $x^2+y^2+z^2=1$ (sur une droite donnée, il y a exactement deux vecteurs unitaires), c'est pour $\lambda=\pm 1$:

$$\boxed{\left\{(0,\sin(\beta),\cos(\beta)),(0,-\sin(\beta),-\cos(\beta))\right\}} \tag{13}$$

Exercice 6. 1. C'est la droite passant par le point $I = (-1, 5)$ est donnée par le vecteur normal $\overrightarrow{AB} = (-8, -4)$, donc le lieu des points $M = (x, y)$ tels que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec $\overrightarrow{IM} = (x + 1, y - 5)$. Équation : $\boxed{2x + y = 3}$.

2. Pour BC : $\boxed{3x - 11y = 17}$. Pour AC : $\boxed{x + 3y = -1}$.
3. L'intersection de ces trois droites correspond au système de trois équations, dont la compatibilité n'est pas automatique :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 11y = 17 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \tag{14}$$

Ici il est $\boxed{\text{compatible}}$ et admet l'unique solution $\boxed{(x, y) = (2, -1)}$: les trois droites s'intersectent bien en un point.

Exercice 7. C'est le plan passant par $I = (1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB} = (4, -4, 4)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ avec $\overrightarrow{IM} = (x-1, y-2, z-3)$. On trouve donc directement l'équation cartésienne : $\boxed{x + y + z = 6}$. On peut alors convertir en équation paramétrée en prenant $y = t \in \mathbb{R}$ et $z = s \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{15}$$

On obtient ci-dessus un point et deux vecteurs du plan.

Exercice 8. 1. Le plan $\mathcal{P}$ passe par $A = (1, 1, 0)$ et est dirigé par $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$. L'équation cartésienne est la condition de compatibilité dans le système d'inconnues (t, s)

$$\begin{cases} x = -3t - 3s + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t + s \end{cases} \tag{16}$$

C'est $\boxed{2x - 3y + 6z = -1}$.

2. $H = (x, y, z)$ doit appartenir à $\mathcal{P}$, donc vérifier l'équation ci-dessus. De plus $\overrightarrow{DH}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ (base de deux vecteurs de $\mathcal{P}$. Posant $\overrightarrow{DH} = (x - 3, y + 4, z - 5)$, cela conduit aux équations

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff -3x + 2y + 2z = -7 \tag{17}$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff -3x + z = -4 \tag{18}$$

Ainsi H est déterminé par le système de trois équations

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z = -1 \\ -3x + 2y + 2z = -7 \\ -3x + z = -4 \end{cases} \tag{19}$$

On trouve une unique solution : $\boxed{H = (1, -1, -1)}$.

3. C'est la norme de $\overrightarrow{DH} = (-2, -3, -6)$: $\boxed{DH = 7}$.

Exercice 9. 1. $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A = (5, 7, 1)$ et dirigé par $\overrightarrow{AB} = (-12, -19, 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-7, -2, -17)$. La représentation paramétrée est alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ -19 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} \tag{20}$$

Une équation cartésienne est obtenue comme la condition de compatibilité du système d'inconnue (t, s) : c'est $\boxed{3x - 2y - z = 0}$.

2. $\mathcal{D}$ est la droite passant par $D = (6, 0, 3)$ et dirigée par $\overrightarrow{DE} = (-12, -14, -13)$. La représentation paramétrée est directement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{D} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ -14 \\ -13 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{DE}} \tag{21}$$

3. On reporte les valeurs de (x, y, z) paramétrés par t dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$3(6 - 12t) - 2(-14t) - (3 - 13t) = 0 \tag{22}$$

On trouve $\boxed{t = -3}$. On reporte alors dans le paramétrage de $\mathcal{D}$: c'est le point $\boxed{(x, y, z) = (42, 42, 42)}$.

Exercice 10. $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A = (0, 2, 1)$ et dirigé par $\overrightarrow{AB} = (1, -4, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$. On trouve l'équation cartésienne $\boxed{2x + y - 2z = 0}$, et donc le vecteur normal $\vec{n} = (2, 1, -2)$.
$\mathcal{P}'$ est le plan passant par $A' = (-1, -1, 3)$ et dirigé par $\overrightarrow{A'B'} = (-1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{A'C'} = (-2, 2, -1)$. On trouve l'équation cartésienne $\boxed{2x + y - 2z = -9}$, et le vecteur normal $\vec{n}' = (2, 1, -2)$.

Les vecteurs normaux sont les mêmes, les plans sont donc parallèles.
Pour calculer la distance entre, il suffit par exemple de projeter orthogonalement un point de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ et de calculer la distance au projeté (comme les plans sont parallèles, cela ne dépend en fait pas du point de $\mathcal{P}$ choisi). On projette A. On peut même chercher le projeté sous forme $H = A + t\vec{n}$, et chercher à quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$ ceci vérifie l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$: on trouve $A+t\vec{n} = (2t, 2+t, 1-2t)$ vérifie $2x+y-2z = -9$ si et seulement si $\boxed{t = -1}$, soit le point $H = (-2, 1, 3)$. On calcule alors $\boxed{AH = 3}$.

Exercice 11. L'équation se ré-écrit

$$\left[(x-m)^2 - m^2\right] + \left[(y+1)^2 - 1\right] + 5 = 0 \tag{23}$$

soit

$$(x-m)^2 + (y+1)^2 = m^2 - 4 \tag{24}$$

On lit alors :

- Cas $m^2 < 4 \Leftrightarrow m \in]-2, 2[$: c'est un cercle de centre $(m, -1)$ et de rayon $\sqrt{m^2 - 4}$.
- Cas $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$: c'est un point seul $(m, -1)$.
- Cas $m^2 > 4 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$: ensemble vide.

Exercice 12. *Une* possibilité : poser une équation de cercle $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$ avec des paramètres inconnus $(x_O, y_O) \in \mathbb{R}^2$, $r \geqslant 0$. Puis écrire que les trois points A, B, C vérifient cette équation, pour obtenir trois conditions sur (x_O, y_O, r). On trouve $(x_O, y_O) = (-1, 1)$ (centre du cercle) ; le rayon est alors bien égal à $OA = OB = OC = 5$.

Exercice 13. On pose $M = (x, y)$ alors $\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A)$ et $\overrightarrow{BM} = (x - x_B, y - y_B)$ et la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \lambda$ donne $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = \lambda$. On développe :

$$x^2 - (x_A + x_B) + y^2 - (y_A + y_B) + x_A x_B + y_A y_B = \lambda \tag{25}$$

puis on factorise :

$$\left[\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2\right] + \left[\left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2\right] + x_A x_B + y_A y_B = \lambda \tag{26}$$

et on réduit tout (on développe $(x_A + x_B)^2$, et on fait ré-apparaitre $(x_A - x_B)^2$) :

$$\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \lambda + \frac{(x_A - x_B)^2}{4} + \frac{(y_A - y_B)^2}{4} \tag{27}$$

L'expression fait apparaitre le milieu $I = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ de $[AB]$ ainsi que la norme $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$:

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = \lambda + \frac{1}{4} AB^2 \tag{28}$$

On lit alors :

- Cas $\lambda > -\frac{1}{4}AB^2$: cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}AB^2}$.
- Cas $\lambda = \frac{1}{4}AB^2$: un seul point I.
- Cas $\lambda < -\frac{1}{4}AB^2$: ensemble vide.