TD 14 correction
Équations différentielles

Exercice 8.

- (E_1) L'équation homogène est $x'' + x' - 6x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$, racines $2, -3$. Solutions : les $\boxed{x_H(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-3t}}$, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution partiulière sous forme $x(t) = At^2 + Bt + C$ où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^2$ (on prend bien entendu le polynôme de degré au moins 2 sinon on n'aura jamais t^2) : alors

$$x(t) = At^2 + Bt + C \tag{1}$$
$$x'(t) = 2At + B \tag{2}$$
$$x''(t) = 2A \tag{3}$$

  qui est solution si et seulement si (en remplaçant)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -6At^2 + (2A - 6B)t + (2A + B - 6C) = -30t^2 - 8t + 1 \tag{4}$$

  On veut alors

$$\begin{cases} -6A = -30 \\ 2A - 6B = -8 \\ 2A + B - 6C = 1 \end{cases} \tag{5}$$

  et on trouve $A = 5$, $B = 3$, $C = 2$. Une solution particulière est $\boxed{x_P(t) = 5t^2 + 3t + 2}$.
  Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ t \mapsto 5t^2 + 3t + 2 + \lambda e^{2t} + \mu e^{-3t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}} \tag{6}$$

- (E_2) L'équation homogène est $x'' - 3x' + 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, racines $1, 2$. Solutions : les $\boxed{x_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}}$, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution particulière sous forme $x(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t$ où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$: alors

$$x(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t \tag{7}$$
$$x'(t) = (At^3 + (3A + B)t^2 + (2B + C)t + C)e^t \tag{8}$$
$$x''(t) = (At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B + C)t + (2B + 2C))e^t \tag{9}$$

  (toujours tout garder sous forme polynôme × exponentielle, et les polynômes eux-même groupés par puissances), qui est solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Big(-3At^2 + (6A - 2B)t + (2B - C)\Big)e^t = (-3t^2 + 10t - 7)e^t \tag{10}$$

  On veut alors

$$\begin{cases} -3A = -3 \\ 6A - 2B = 10 \\ 2B - C = -7 \end{cases} \tag{11}$$

  et on trouve $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$. Une solution particulière est $\boxed{x_P(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t)e^t}$.
  Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ t \mapsto (t^3 - 2t^2 + 3t)e^t + \lambda e^t + \mu e^{2t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}} \tag{12}$$

- (E_3) L'équation homogène est $x'' + x' - 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, racines $1, -2$. Solutions : les $\boxed{x_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t}}$, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution particulière sous forme $x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$: alors

$$x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \tag{13}$$
$$x'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \tag{14}$$
$$x''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) \tag{15}$$

  qui est solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (-6A + 2B)\cos(2t) + (-2A - 6B)\sin(2t) = 8\sin(2t) \tag{16}$$

  On veut alors

$$\begin{cases} -6A + 2B = 0 \\ -2A - 6B = 8 \end{cases} \tag{17}$$

  et on trouve $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{6}{5}$. Une solution particulière : $\boxed{x_P(t) = -\frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{6}{5}\sin(2t)}$.
  Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ t \mapsto -\frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{6}{5}\sin(2t) + \lambda e^t + \mu e^{-2t} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}} \tag{18}$$

- (E_4) L'équation homogène est $x'' - 2x' + 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$, racines $1 \pm i$. Solutions : les $\boxed{x_H(t) = e^t(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t))}$, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Solution particulière sous forme $x(t) = Ate^t\cos(t) + Bte^t\sin(t)$: alors on dérive (calcul un peu pénible, grouper ensemble deux des trois termes de $te^t\cos(t)$ et $te^t\sin(t)$ pour dériver comme un produit, toujours garder sous forme polynôme $\times$ exponentielle $\times$ sinus ou cosinus)
  $$x(t) = Ate^t\cos(t) + Bte^t\sin(t) \tag{19}$$
  $$x'(t) = ((A+B)t + A)e^t\cos(t) + ((-A+B)t + B)e^t\sin(t) \tag{20}$$
  $$x''(t) = (2Bt + (2A+2B))e^t\cos(t) + (-2At + (-2A+2B))e^t\sin(t) \tag{21}$$
  qui est solution si et seulement si (on remplace et on simplifie tout)
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2Be^t\cos(t) - 2Ae^t\sin(t) = e^t\cos(t) \tag{22}$$
  On veut alors
  $$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \tag{23}$$
  donc $B = \frac{1}{2}$ et $A = 0$. Une solution particulière : $\boxed{x_P(t) = \frac{1}{2}te^t\sin(t)}$.
  Conclusion :
  $$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{2}te^t\sin(t) + e^t(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}} \tag{24}$$

Exercice 9.
- (E_1) L'équation homogène est $xy' = 5y$, qui est équivalente à $x' = \frac{5}{x}y$ mais on doit résoudre séparément sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On trouve pour $x > 0$, $\boxed{y_H(x) = Ce^{5\ln(x)} = Cx^5}$, et pour $x < 0$, $\boxed{y_H(x) = Dx^5}$, pour des constantes C et D dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas a priori les mêmes.
  Variation de la constante : sur $]0, +\infty[$, on cherche une solution particulière sous forme $y(x) = C(x)x^5$ où C est une fonction dévivable, qui est solution si et seulement si
  $$\forall x > 0, \quad x \times C'(x)x^5 = x^8 \tag{25}$$
  Donc $C'(x) = x^2$: une primitive est $\frac{x^3}{3}$ et alors $\boxed{y_P(x) = \frac{x^8}{3}}$. Sur $]-\infty, 0[$, on trouve la même solution particulière (il suffit de vérifier que celle-ci convient !).
  Conclusion :
  $$\boxed{\mathcal{S}_{(E)_1} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} Cx^5 + \frac{x^8}{3} & x > 0 \\ Dx^5 + \frac{x^8}{3} & x < 0 \end{cases} \;\middle|\; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}} \tag{26}$$
- (E_2) On se place sur un intervalle $I_k =]\frac{\pi}{2} - k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$, sur lequel cos ne s'annule pas. Alors l'équation homogène est $y' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}y$. Une primitive de $-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est $\ln|\cos(x)|$, l'ensemble des solutions est alors $Ce^{\ln|\cos(x)|}$ soit $y_H(x) = C|\cos(x)|$. En fait, cos garde un signe constant sur l'intervalle I_k donc le signe peut faire partie de C et on pose $\boxed{y_H(x) = C\cos(x)}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
  Recherche de solution particulière : en réfléchissant bien avec les formules de trigonométrie usuelles, on voit que $\sin(x)$ est solution… Sinon par variation de la constante : on cherche sous forme $y(x) = C(x)\cos(x)$ où C est une fonction dérivable sur I_k, qui est solution si et seulement si
  $$\forall x \in I_k, \quad \cos(x) \times C'(x)\cos(x) = 1 \tag{27}$$
  Alors $C'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$: une primitive est la fonction tangente donc on prend $C(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et alors on retombe bien sur $\boxed{y_P(x) = \sin(x)}$. Ceci est bien sûr solution particulière sur chacun des intervalles I_k.
  Conclusion : l'ensemble des solutions sur un intervalle I_k est
  $$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2), I_k} = \left\{ x \mapsto C\cos(x) + \sin(x) \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}} \tag{28}$$
  où la constante C dépend de l'intervalle I_k.

Exercice 10. **Si** f est solution, on dérive une fois et f doit vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x)$ ce qui est aussi $-f(x)$. Donc f vérifie l'équation différentielle $f'' = -f$. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
Mais attention ce n'est pas tout. **Réciproquement**, une telle fonction vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \lambda\cos(x) - \mu\sin(x)$ ce qui est possible si et seulement si $\lambda = \mu$.
Conclusion : ce sont toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda(\cos(x) + \sin(x))}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.