

# TD 11 correction

## Dénombrément

**Exercice 13.** 1. D'abord quelques exemples :

- Une application de  $\llbracket 1, 1 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  correspond exactement au choix d'un seul élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il y en a  $n$ .
- Une application strictement croissante de  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  correspond au choix de deux éléments  $i < j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ( $i = f(1)$ ,  $j = f(2)$ ). Le nombre de tels choix est exactement  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  : parmi les  $n(n-1)$  choix de couples  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , la moitié seulement auront  $i < j$ .
- Une application strictement croissante de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  correspond au choix de trois éléments  $i < j < k$  ( $i = f(1)$ ,  $j = f(2)$ ,  $k = f(3)$ ). Le nombre de tels choix est  $\binom{n}{3}$ , car étant donné 3 éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il y a une unique façon de les mettre dans l'ordre pour que  $i$  soit le plus petit,  $j$  le second, et  $k$  le troisième.

Plus généralement le nombre d'applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est exactement  $\binom{n}{p}$  : il suffit de choisir une partie à  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et de les ranger dans l'ordre, alors le plus petit sera  $f(1)$ , le second sera  $f(2)$ , etc.

2. Soit  $f$  une application croissante de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrons que  $\tilde{f} : k \mapsto f(k) + k - 1$  est strictement croissante de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$  (réciproquement, alors  $f(k) = \tilde{f}(k) - k + 1$ ). Pour deux indices  $i < j$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , alors  $\tilde{f}(i) = f(i) + i - 1$ ,  $\tilde{f}(j) = f(j) + j - 1$ , et on sait par hypothèse  $f(i) \leq f(j)$ , on déduit donc bien  $\tilde{f}(i) < \tilde{f}(j)$ . Et sachant  $1 \leq k \leq p$  et  $1 \leq f(k) \leq n$  on déduit bien  $1 \leq \tilde{f}(k) \leq n + p - 1$ . Il y a donc autant d'applications croissantes  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  que d'applications strictement croissantes  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$  : ce nombre est donc  $\binom{n+p-1}{p}$ .

L'idée est que la transformation  $f \mapsto \tilde{f}$  « augmente les écarts » : si  $f$  prend deux fois de suite la même valeur ( $f(i) = f(i+1)$ ) alors on aura  $\tilde{f}(i+1) = \tilde{f}(i) + 1$ , de telle sorte que  $\tilde{f}$  est toujours strictement croissante, et qu'on puisse en fait retrouver  $f$  à partir de  $\tilde{f}$ .

3. Dans la première situation : l'ensemble des fonctions strictement croissantes  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est en bijection avec l'ensemble des parties à  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . La bijection est d'associer à une telle application son image directe.

Dans la deuxième situation, la transformation  $f \mapsto \tilde{f}$  est une bijection entre les applications croissantes  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ , et les applications strictement croissantes  $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ .