TD 9
Étude de fonctions

Exercice 6. On fixe $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. Par une suite de manipulations usuelles sur le logarithme, l'inégalité est équivalente à :

$$\frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1}$$
$$\iff \frac{1}{2}\ln(ab) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2}$$
$$\iff \ln(\sqrt{ab}) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3}$$
$$\iff \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \tag{4}$$
$$\iff ab \leqslant \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \tag{5}$$
$$\iff 4ab \leqslant a^2+2ab+b^2 \tag{6}$$
$$\iff 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 \tag{7}$$
$$\iff 0 \leqslant (a-b)^2 \tag{8}$$

ce qui est bien vrai car un carré est positif ; toutes les étapes sont bien des équivalences car $a,b>0$. La ligne (4) est elle-même bien connue sous le nom d'*inégalité arithmético-géométrique* : $\frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique de a et de b, et $\sqrt{ab}$ est leur moyenne géométrique.

Exercice 7. Soit $x \in]0,1[$, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2} \tag{9}$$
$$\iff \exp\Big(x\ln(x)\Big)\exp\Big((1-x)\ln(1-x)\Big) \geqslant \frac{1}{2} \tag{10}$$
$$\iff \exp\Big(x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)\Big) \geqslant \frac{1}{2} \tag{11}$$
$$\iff x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

Posons alors la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$. La dérivée est

$$\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = 1+\ln(x)-1-\ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \tag{13}$$

Étude du signe, tableau de variations : f' est du signe de

$$\frac{x}{1-x}-1 = \frac{2x-1}{1-x} \tag{14}$$

(ici $1-x>0$) et f admet bien un minimum en $x=\frac{1}{2}$ valant $\ln(\frac{1}{2})$, ce qui correspond à l'inégalité demandée.

Exercice 9. On note $(*)$ la condition : g est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = g(x)\times g(y) \tag{15}$$

Appliquer $(*)$ avec $x \leftarrow \frac{x}{2}$ et $y \leftarrow \frac{y}{2}$: $g(x) = g(\frac{x}{2})^2$ qui est donc positif.
S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0)=0$: appliquer $(*)$ avec $x \leftarrow x-x_0$ et $y \leftarrow y_0$: $g(x) = g(x-x_0)\times g(x_0) = 0$.
Donc : si g s'annule en un point alors g est la fonction nulle (effectivement, la fonction nulle vérifie bien $(*)$) ; sinon g ne s'annule jamais et reste toujours strictement positive.
On se place donc dans le cas $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)>0$ et on pose $f = \ln\circ g$, qui vérifie : f est continue et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Par l'exercice précédent, il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$, et alors $g(x) = \exp(\alpha x)$. Ceci est bien continue et vérifie $(*)$.
Conclusion : l'ensemble des fonctions qui vérifient $(*)$ est exactement formé par la fonction nulle $\boxed{x \mapsto 0}$ et toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \exp(\alpha x)}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.