TD 8 correction
Applications

Exercice 8. 1. D'abord le domaine de définition $\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$, en effet au dénominateur $e^{2x}+1>0$.

On dérive :

$$\text{th}'(x) = \frac{2e^{2x}\times(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)\times 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0 \tag{1}$$

donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a aussi besoin des limites : en $+\infty$,

$$\text{th}(x) = \frac{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{2}$$

En $-\infty$ par contre on trouve directement $\text{th}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$	
$\text{th}(x)$	-1	0	1

(3)

Par le théorème de la bijection (la fonction est bien strictement croissante, et continue) on en déduit que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

2. Soit $y \in]-1,1[$, soit $x\in\mathbb{R}$. Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned}\text{th}(x) = y &\iff e^{2x}-1 = (e^{2x}+1)y \iff e^{2x}-1 = ye^{2x}+y\\ &\iff e^{2x}(1-y) = 1+y \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}\end{aligned} \tag{4}$$

On aura alors $2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ puis $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ ...

... À condition de vérifier que le terme sous le ln est bien strictement positif. Or avec un petit tableau de signes

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+y$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-y$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

(5)

C'est bien le cas si et seulement si $-1<y<1$, ce qui redémontre au passage (mais sans utiliser de tableau de variations !) que l'image de la fonction th est bien $]-1,1[$.

Conclusion : l'application réciproque de th est la fonction *argument tangente hyperbolique*

$$\begin{aligned}\text{th}^{-1} = \text{Argth} :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ y &\longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Exercice 9. On écrit toujours notre polynôme $P : x\mapsto ax^2+bx+c$, ce qui permet de calculer aussi $P'(x) = 2ax+b$, et on utilise la méthode « tout en même temps ». Et on commence par ré-écrire proprement la question à chaque fois.

- φ_1 : soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+\ \ b+c = u\\ 4a+2b+c = v\end{cases} \quad ? \tag{7}$$

Ce système est équivalent à ($L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$)

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u\\ \ \ -2b-3c = v-4u\end{cases} \tag{8}$$

Une solution existe toujours, on peut prendre c quelconque, qui détermine ensuite b puis a.

Conclusion : φ_1 est surjective (une solution existe toujours) mais n'est pas injective (il y a plusieurs solutions, en faisant varier c). La donnée de deux points de passage aux abscisses 1 et 2 détermine au moins un polynôme de degré 2, et en fait une infinité.

- φ_2 : soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$, existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+\ \ b+c = u\\ 4a+2b+c = v\\ 9a+3b+c = w\end{cases} \quad ? \tag{9}$$

Ce système est équivalent à ($L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$)

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u\\ \ \ -2b-3c = v-4u\\ \ \ -6b-8c = w-9u\end{cases} \tag{10}$$

puis à $(L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u \\ \quad -2b-3c = v-4u \\ \qquad\qquad c = (w-9u)-3(v-4u) \end{cases} \tag{11}$$

Il y a toujours une unique solution : L_3 détermine un unique c, qu'on reporte dans L_2 ce qui détermine b, qu'on reporte dans L_1 ce qui détermine a.

Conclusion : φ_2 est bijective. La donnée de trois points de passage aux abscisses 1, 2 et 3 détermine un et un seul polynôme de degré 2.

- φ_3 : soit $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+\ \ b+c = u \\ 2a+\ \ b \qquad = v \\ 4a+2b+c = w \end{cases} \quad ? \tag{12}$$

Ce système est équivalent à $(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u \\ \quad -\ \ b-2c = v-2u \\ \quad -2b-3c = w-3u \end{cases} \tag{13}$$

puis à $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$

$$\begin{cases} a+b+\ \ c = u \\ \quad -b-2c = v-2u \\ \qquad\quad c = (w-3u)-2(v-2u) \end{cases} \tag{14}$$

Là encore, on voit qu'il y a une unique solution : L_3 détermine un unique c, puis L_2 détermine b puis L_1 détermine a.

Conclusion : φ_3 est bijective. La donnée d'un point de passage à l'abscisse 1, ainsi que d'une tangente en ce point, et d'un point de passage à l'abscisse 2, détermine un et un seul polynôme de degré 2.

- φ_4 : soit $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+\ \ b+c = u \\ 4a+\ \ b \qquad = v \\ 9a+3b+c = w \end{cases} \quad ? \tag{15}$$

Ce système est équivalent à $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1)$

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u \\ \quad -3b-4c = v-4u \\ \quad -6b-8c = w-9u \end{cases} \tag{16}$$

Ce n'est pas tout à fait pareil, car les équations de L_3 sont le double de celles de L_2. Si on n'a *pas*

$$2 \times (v-4u) = w-9u \tag{17}$$

alors L_2 et L_3 donnent deux valeurs différentes pour la quantité $-3b-4c$, ce qui est absurde ! Le choix $(u,v,w) = (0,0,1)$ par exemple n'admet pas d'antécédent, et donc φ_4 n'est pas surjective.

Mais si cette condition est bien vérifiée, alors les lignes L_2 et L_3 sont en fait les mêmes et le système est équivalent à

$$\begin{cases} a+\ \ b+\ \ c = u \\ \quad -3b-4c = v-4u \end{cases} \tag{18}$$

On voit qu'on peut choisir c quelconque, puis L_2 détermine b puis L_1 détermine a. Comme il y a plusieurs choix possibles pour c, alors (u,v,w) admet plusieurs antécédents, donc φ_4 n'est pas injective.

Conclusion : φ_4 n'est ni surjective, ni injective. Étant donnés des points de passage aux abscisses 1 et 3, et une dérivée en 2, on ne peut pas toujours trouver un polynôme de degré 2 passant là, et si on en trouve un alors on peut en trouver plusieurs, en fait une infinité.

Un cas concret : prenons $u = w = 0$, alors les polynômes de degré 2 s'annulant en 1 et en 3 forment une parabole dont le sommet est en 2, et donc la dérivée s'annule nécessairement en 2. Si on prend $v = 0$, alors il y a pour choix possible tous les $x \mapsto \lambda(x-1)(x-3)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $v \neq 0$, alors il n'y a aucun choix possible.

Exercice 10. 1. Montrons $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$:

- Inclusion $\subset$: soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y \in f(A)$; et si $x \in B$ alors $y \in f(B)$. Donc dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(B)$.
- Inclusion $\supset$: soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors si $y \in f(A)$, il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et alors $x_1 \in A \cup B$, et donc $y \in f(A \cup B)$. Et si $y \in f(B)$, alors il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$, et donc $x_2 \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$ aussi. Dans tous les cas, $y \in f(A \cup B)$.

2. - Montrons qu'on a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$:
   Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. D'une part $x \in A$, donc $y \in f(A)$. Et d'autre part $x \in B$, donc $y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

- Remarque : dans l'autre sens, on n'y arrive pas... Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et $y \in f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas montrer que $x_1 = x_2 \in A \cap B$. On peut même très bien avoir $A \cap B = \emptyset$ mais avec A, B ayant même image par f auquel cas $f(A \cap B) = \emptyset$ mais $f(A) = f(B)$ est non vide.
- Contre-exemple concret : f est l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A =]-\infty, 0[$ et $B =]0, +\infty[$. Alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, mais $f(A) = f(B) =]0, +\infty[$ donc $f(A) \cap f(B) =]0, +\infty[$.

3. Supposons f injective, montrons qu'alors on a bien $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$:
   - Par le raisonnement ci-dessus on a bien toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   - Montrons $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$: soit $y \in f(A) \cap f(B)$, alors comme on l'a dit d'une part $y \in f(A)$ donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$, et d'autre part $y \in f(B)$ donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Mais de $y = f(x_1) = f(x_2)$, et de l'injectivité de f, on tire $x_1 = x_2$. Cet élément est donc à la fois dans A et dans B, donc est dans $A \cap B$, et y est son image donc $y \in f(A \cap B)$.
4. Démontrons la réciproque : si $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ est vraie pour toutes parties A, B de E alors f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, supposons $f(x_1) = f(x_2)$. Appliquons cette propriété à $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, qui nous donne que $f(A) \cap f(B)$ est un ensemble à un seul élément inclus dans $f(A \cap B)$, et donc $f(A \cap B)$ ne peut pas être vide et donc $A \cap B$ non plus et donc c'est que $x_1 = x_2$.