TD 6 correction
Suites

Exercice 13. 1. En comptant en nombre de millions d'habitants, et en comptant les années à partir de 2024 :

```
def exo2_suite(n):
    # u représente u(2024+i)
    u = 12
    for i in range(n):
        u = 1.0105 * u + 0.08
    return u
```

et pour la liste :

```
def exo2_liste(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 12
    for i in range(1, n):
        L[i] = 1.0105 * L[i-1] + 0.08
    return L
```

2. Par exemple la première :

```
def exo4_1_suite(n):
    # u représente u(i) et v représente u(i+1)
    u = 1
    v = 8
    for i in range(n):
        t = 4*v - 4*u
        u = v
        v = t
    return u
```

et

```
def exo4_1_liste(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 1
    L[1] = 8
    for i in range(2, n):
        L[i] = 4 * L[i-1] - 4 * L[i-2]
    return L
```

3. On utilise une boucle avec deux variables `a` et `b` pour représenter chacune des deux suites. Dans la boucle on souhaite faire simultanément les opérations $\begin{cases} \mathtt{a} \leftarrow 4\mathtt{a} - \mathtt{b} \\ \mathtt{b} \leftarrow 2\mathtt{a} - \mathtt{b} \end{cases}$ ce que nécessite de passer par des variables intermédiaires (même problème que pour l'échange de deux variables) !

```
def exo9_suite(n):
    # a représente a(i) et b représente b(i)
    a = 1
    b = 0
    for i in range(n):
        aa = 4*a - b
        bb = 2*a - b
        a = aa
        b = bb
    return (a, b)
```

Pour la liste, une possibilité en utilisant plutôt `append` cette fois :

```
def exo9_liste(n):
    L = [(1, 0)]
    for i in range(1, n):
        (a, b) = L[i-1]
        L.append((4*a - b, 2*a - b))
    return L
```

Exercice 14.

- (C) : $q^2+4q-1=0$, racines $q_1=-2+\sqrt{5}$, $q_2=-2-\sqrt{5}$. Donc : il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = A(-2+\sqrt{5})^n + B(-2-\sqrt{5})^n$. On trouve ensuite $A=B=-\frac{1}{2}$.

  Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{2}\Big((-2+\sqrt{5})^n + (-2-\sqrt{5})^n\Big)$.
- (C) : $q^2-6q+9=0$, cas $\Delta=0$, racine double $q=3$. Donc : il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=(A+Bn)3^n$. On trouve $A=2$ puis $B=-1$.

  Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=(2-n)3^n$.
- (C) : $q^2+4q+8=0$, cas $\Delta<0$, racines $q=-2\pm 2i$. Prenons $q=-2+2i$, à mettre sous forme algébrique $q=2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$. Donc : il existe $(C,D)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=(2\sqrt{2})^n\Big(C\cos(\frac{3n\pi}{4})+D\sin(\frac{3n\pi}{4})\Big)$. On trouve $C=0$ et $D=1$.

  Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=(2\sqrt{2})^n\sin(\frac{3n\pi}{4})$.

Exercice 15. On pose $u_n=\frac{1}{2\sqrt{7}}\left((3+\sqrt{7})^n-(3-\sqrt{7})^n\right)$, on reconnait un nombre de la forme $Aq_1^n+Bq_2^n$ avec

$$q_1=3+\sqrt{7},\quad q_2=3-\sqrt{7},\quad A=\frac{1}{2\sqrt{7}},\quad B=-\frac{1}{2\sqrt{7}} \tag{1}$$

L'équation caractéristique est $(q-q_1)(q-q_2)=0$ qui donne en développant $q^2-6q+2=0$. On calcule de plus $u_0=0$ et $u_1=1$.
Donc : u_n est le terme général de l'unique suite vérifiant

$$u_0=0, \quad u_1=1, \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-6u_{n+1}+2u_n=0 \tag{2}$$

Mais on démontre par récurrence double (en ne faisant plus du tout référence à la formule donnée) qu'une telle suite est entière : c'est vrai pour $n=0$ et $n=1$, et si u_n et u_{n+1} sont entiers alors $6u_{n+1}-2u_n$ est encore entier donc $u_{n+2}=6u_{n+1}-2u_n$ est entier.
Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce nombre u_n est entier.

Exercice 16. D'abord on montre par récurrence double $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$:
C'est le cas pour $n=0$ et pour $n=1$; et si $u_n>0$ et $u_{n+1}>0$ alors par la formule $u_{n+2}>0$.
On peut alors poser $v_n=\ln(u_n)$, bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qui vérifie

$$v_0=\ln(2), \quad v_1=2\ln(2), \quad \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=4v_{n+1}-3v_n \tag{3}$$

On trouve par suite $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{\ln(2)}{2}(1+3^n)$.
On a alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=e^{v_n}$. Cela se simplifie un peu :

$$u_n=e^{v_n}=e^{\frac{\ln(2)}{2}(1+3^n)}=\left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{1+3^n}{2}}=2^{\frac{1+3^n}{2}} \tag{4}$$

et donne bien u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.