TD 5 correction
Nombres complexes

Exercice 15. 1. On trouve $(2+i)^2 = 3+3i$, $(2+i)^3 = 2+11i$, $(2+i)^4 = -7+24i$, et on remplace.

2. Idem, ou bien c'est automatique en conjugant.
3. $Q : z \mapsto z^2 - 4z + 5$.
4. Analyse-synthèse classique.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z^2 + 2z - 1) \times \underbrace{(z^2 - 4z + 5)}_{Q(z)} \tag{1}$$

5. Alors $P(z) = 0$ si et seulement si $Q(z) = 0$ (les solutions $2+i$ et $2-i$) ou $z^2+2z-1 = 0$. Pour cette dernière on trouve $z = -1 \pm \sqrt{2}$. Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 2+i, 2+i \right\} \tag{2}$$

Exercice 16.

- (E_1) On élève au carré des deux côtés puis on pose $z = x+iy$, on trouve $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$ qui se simplifie en $-y = x$. Donc

$$\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ z = x - ix \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

  Géométriquement : les points à égale distance de i et de -1 forment une droite, la deuxième diagonale.

- $(E_2) \iff z(z^2 - 2z + 9) = 0 \iff z = 0$ ou $z^2 - 2z + 9 = 0$.

$$\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ 0, 1 - 2i\sqrt{2}, 1 + 2i\sqrt{2} \right\} \tag{4}$$

- (E_3) On peut chercher sous forme algébrique, ou aussi exponentielle : d'une part $z = 0$ est solution, et d'autre part $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) est solution si et seulement si $r^2 e^{2i\theta} = re^{-i\theta}$. On doit donc avoir $r = 1$ puis $\exists k \in \mathbb{Z}$, $2\theta = -\theta + 2k\pi$, soit $\theta = \frac{2k\pi}{3}$. Prenant θ dans $[0, 2\pi[$ on trouve trois solutions (correspondant à $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$), sans oublier le 0 qu'on a exclu pour parler de forme exponentielle :

$$\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ 0, 1, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \right\} \tag{5}$$

- (E_4) On pose $Z = z^2$. Alors pour $Z^2 = 4Z + 5$ on trouve deux solutions $Z_1 = -1$ et $Z_2 = 5$. Puis il faut résoudre $z^2 = -1$ et $z^2 = 5$. Donc

$$\mathcal{S}_{(E_4)} = \left\{ i, -i, \sqrt{5}, -\sqrt{5} \right\} \tag{6}$$

- (E_5) Pas défini si $z = \frac{3}{5}$: $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{5}\}$. On pose $z = x + iy$ plus ou moins tard et on exprime $\frac{z+4i}{5z-3}$ sous forme algébrique.

$$\frac{z+4i}{5z-3} = \frac{(x(5x-3) + 5y(y+4)) + i(-5xy + (y+4)(5x-3))}{|5z-3|^2} \tag{7}$$

  La condition $\mathfrak{Im}\left(\frac{z+4i}{5z-3}\right) = 0$ est équivalente à $-5xy + (y+4)(5x-3) = 0$ soit $20x - 3y - 12 = 0$. Ceci est une équation de droite, on peut par exemple prendre x quelconque puis $y = \frac{20}{3}x - 4$.

$$\mathcal{S}_{(E_5)} = \left\{ z = x + i\left(\tfrac{20}{3}x - 4\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \tag{8}$$

- (E_6) équivalente à $z(z^6 - 1) = 0$ soit $z = 0$ ou $z^6 = 1$. Les solutions de cette dernières sont les 6 racines 6-èmes de l'unité $e^{ik\pi/3}$ ($0 \leqslant k \leqslant 5$).

$$\mathcal{S}_{(E_6)} = \left\{ 0, \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \right\} \tag{9}$$

Exercice 17. Il suffit d'écrire

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \tag{10}$$
$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \tag{11}$$

puis de faire la somme de ces deux lignes.
Géométriquement : si z représente un vecteur $\vec{u}$ et w représente un vecteur $\vec{v}$ alors ces deux vecteurs délimitent un parallélogramme, la somme des longueurs au carré des côtés est $2(|z|^2 + |w|^2)$. Les deux diagonales du parallélogramme sont les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$, ainsi $|z+w|^2$ et $|z-w|^2$ sont les carrés des longueurs des diagonales.
La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés !

Exercice 18. On démontre dans l'ordre (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i).

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons qu'on ait $(M, N) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in A$, $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant M$ et $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant N$. Écrivant $z = a + bi$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) alors $|z|^2 = a^2 + b^2 \leqslant M^2 + N^2$ donc $|z| \leqslant \sqrt{M^2 + N^2}$, ceci démontre (ii) avec $R = \sqrt{M^2 + N^2}$.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) : supposons qu'on ait $R \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in A$, $|z| \leqslant R$. Écrivant $z = a + bi$, on a $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ et aussi $b^2 \leqslant a^2 + b^2$, d'où on déduit à la fois $|a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant R$ et $|b| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant R$. C'est donc en posant $P = R$ qu'on obtient (iii).
- (iii) $\Rightarrow$ (i) : immédiat en prenant M et N tous les deux égaux à P.

En résumé : la partie A est bornée en module si et seulement si elle est bornée à la fois en parties réelles et en parties imaginaires, et dans ce dernier cas on peut même prendre la même borne pour les deux.

Géométriquement : la partie A peut être incluse dans un cercle, si et seulement si elle peut être incluse dans un carré, si et seulement si elle peut être incluse dans un rectangle — toujours sous-entendu : quitte à prendre ces parties assez grandes pour inclure A. Si A n'est pas bornée, alors ses éléments partent à l'infini et on ne peut pas l'inclure dans une telle partie.