TD 4 correction
Trigonométrie

Exercice 15. 1. (a) $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, d'où

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \tag{1}$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \tag{2}$$
$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3} \tag{3}$$

(b) $2 \times \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$, on applique donc deux fois la méthode « utiliser la formule de duplication pour diviser » en ayant d'abord déterminé les $\frac{\pi}{8}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \tag{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}{2} \tag{5}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \tag{6}$$

cette dernière pouvant se simplifier jusqu'à $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}$, toujours en utilisant les méthodes de quantités conjugées des racines.

(c) $2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$ mais attention en extrayant des racines carrées car $\cos(\frac{5\pi}{8}) < 0$ alors que $\sin(\frac{5\pi}{8}) > 0$:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \tag{7}$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \tag{8}$$
$$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1 - \sqrt{2} \tag{9}$$

Pour cette dernière, selon la méthode utilisée, on trouve d'abord $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$, qu'on peut arriver à simplifier en multipliant sous la racine par $2+\sqrt{2}$ en haut et en bas.

2. On trouve : $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$A = \cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) \tag{10}$$
$$B = -3\cos(\theta) + 4\sin(\theta) = 5\cos(\theta + \varphi) \tag{11}$$

où φ est tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = -\frac{3}{5} \\ \sin(\varphi) = -\frac{4}{5} \end{cases} \tag{12}$$

On peut donc prendre $\varphi = -\arccos(-\frac{3}{5})$.

3. On trouve : $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \tag{13}$$
$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \tag{14}$$
$$\sin^2(\theta)\cos^2(3\theta) = -\frac{1}{8}\cos(8\theta) + \frac{1}{4}\cos(6\theta) - \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{1}{4} \tag{15}$$

4. De $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ on tire $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, d'où

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 \tag{16}$$

et donc nécessairement $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.
Comment choisir le signe ? Par définition $\arccos(x) \in [0, \pi]$; et pour $\theta \in [0, \pi]$ alors $\sin(\theta) \geqslant 0$. Connaissant $\sin^2(\theta)$ et $\sin(\theta) \geqslant 0$ on en déduit donc $\sin(\theta) = +\sqrt{1 - x^2}$.

5. D'une part $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, d'autre part on calcule en posant par exemple $\alpha = \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{5})) + \tan(\arctan(\frac{1}{8}))}{1 - \tan(\arctan(\frac{1}{8}))\tan(\arctan(\frac{1}{8}))} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{3} \tag{17}$$

et de même

$$\tan(\arctan(\tfrac{1}{2}) + \alpha) = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{2})) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\arctan(\frac{1}{2}))\tan(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1 \tag{18}$$

Il reste à vérifier que ce nombre $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$ est bien dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (dans cet intervalle, il est vrai que si deux nombres ont la même tangente alors ils sont égaux). Avec la croissance des fonctions, tangente comme arctangente, on déduit $0 < \arctan(\frac{1}{n}) < \frac{\pi}{4}$ dès que $n > 1$, conséquence de $0 < \frac{1}{n} < 1$ et de $\tan(0) = 0$, $\tan(1) = \frac{\pi}{4}$. On sait alors $0 < \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8}) < \frac{3\pi}{4}$ ce qui semble insuffisant... Mais ce nombre ne peut pas être dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ car là-dessus la tangente est négative ! Il est donc dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

6. Même méthode. On calcule par exemple

$$\tan(2\arctan(\tfrac{1}{5})) = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}} = \frac{5}{12} \tag{19}$$

puis avec $4\arctan(\frac{1}{5}) = 2\times 2\arctan(\frac{1}{5})$

$$\tan(4\arctan(\tfrac{1}{5})) = \frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}} = \frac{120}{119} \tag{20}$$

et enfin

$$\tan(4\arctan(\tfrac{1}{5}) - \arctan(\tfrac{1}{239})) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}} = 1 \tag{21}$$

On doit encore vérifier que $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sachant $0 < \arctan(\frac{1}{5}) < \frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4} < -\arctan(\frac{1}{239}) < 0$ on déduit $-\frac{\pi}{4} < 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) < \pi$, mais là encore, la tangente étant positive, ceci n'est ni dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[$ ni dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, donc est en fait dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.