# TD 3 correction
# Nombres réels

**Exercice 9.**

- ($E_1$) Trois cas à traiter selon la position de $x$ par rapport à 1 et à $\frac{5}{2}$.
  - Cas $x \leqslant 1$ : l'équation est $-(x-1) = -(2x-5)$, solution $x = 4$, pas dans l'intervalle.
  - Cas $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$ : l'équation est $x - 1 = -(2x-5)$, solution $x = 2$, bien dans l'intervalle.
  - Cas $\frac{5}{2} \leqslant x$ : l'équation est $x - 1 = 2x - 5$, solution $x = 4$, dans l'intervalle.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \{2, 4\}$.
- ($E_2$) D'abord $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.
  - Cas $x > 0$ : l'équation est $3x = \frac{1}{x}$, solutions $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, donc on garde $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
  - Cas $x < 0$ : l'équation est $-x = \frac{1}{x}$, pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
- ($E_3$) Directement par équivalences

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3 && (1)\\ &\iff 4 \leqslant x^2 + 1 < 9 && (2)\\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 8 && (3)\end{aligned}$$

  donc $\mathcal{S} = ]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$.
- ($E_4$) D'abord $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Puis $\forall x \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff \frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} < 0 && (4)\\ &\iff \frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)(x-2)} < 0 && (5)\\ &\iff \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} < 0 && (6)\end{aligned}$$

  Le numérateur a pour racines 3 et 4, se factorise en $(x-3)(x-4)$. Tableau de signe sans oublier la double barre sur 1 et 2, on trouve $\mathcal{S} = ]1, 2[ \cup ]3, 4[$.
- ($E_5$) D'abord il faut $x + 3 > 0$ soit $x > -3$, et $x - 1 > 0$ soit $x > 1$. Donc $\mathcal{D} = ]1, +\infty[$. Puis pour $x \in \mathcal{D}$, passant à l'exponentielle, l'équation est équivalente à $x + 3 \geqslant e(x-1)$ soit $0 \geqslant (e-1)x - (e+3)$ (on sait au moins $2 < e < 3$ donc $e - 1 > 0$). Solutions pour $x \leqslant \frac{e+3}{e-1}$. Où se situe ce nombre par rapport à $\mathcal{D}$ ? On voit $e - 1 < e + 3$ donc $1 < \frac{e+3}{e-1}$ : il y a bien un intervalle non-vide de solutions.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \left]1, \frac{e+3}{e-1}\right]$.
- ($E_6$) On pose $y = e^x$ maintenant, ou bien après avoir d'abord multiplié par $e^x$ des deux côtés. On trouve (première méthode) $2y + 1 = \frac{6}{y}$, mais $y > 0$ donc on peut multiplier des deux côtés et ramener à $2y^2 + y - 6$. Si on multiplie par $e^x$ d'abord, on n'a pas cette étape…

  Dans tous les cas on trouve $y_1 = -2$ et $y_2 = \frac{3}{2}$ et à la fin $\mathcal{S} = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$.
- ($E_7$) Trois cas à traiter selon la position de $x$ par rapport à $-2$ et à $\frac{1}{3}$.
  - Cas $x \leqslant -2$ : l'équation est $-4x - 1 = 4$, solution $x = -\frac{5}{4}$, qui n'est pas dans notre intervalle.
  - Cas $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ : l'équation est $-2x + 3 = 4$, solution $x = -\frac{1}{2}$, qui est bien dans l'intervalle.
  - Cas $\frac{1}{3} \leqslant x$ : l'équation est $4x + 1 = 4$, solution $x = -\frac{3}{4}$, qui n'est pas dans l'intervalle.

  Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- ($E_8$) Défini si et seulement si $2x + 1 \geqslant 0$, donc $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On écrit par exemple sous forme $\sqrt{2x+1} = 1 - x$, on remarque que si $x$ est solution alors $x \leqslant 1$, et on élève au carré, qui donne $2x + 1 = (1-x)^2$ puis $x^2 - 4x = 0$, solutions $x = 0$ (qui est bien dans l'intervalle) et $x = 4$ (pas solution car plus grand que 1).

  Conclusion : $\mathcal{S} = \{0\}$.

**Exercice 10.**

1. On trouve $B^2 = 3 + 3 + 2\sqrt{1} = 8$ d'où $B = 2\sqrt{2}$ (il faut vérifier d'abord $B \geqslant 0$, d'ailleurs $3 - 2\sqrt{2} \geqslant 0$).
2. On a toujours avec la quantité conjuguée $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ donc la somme est (« somme téléscopique »)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \qquad (7)\end{aligned}$$

3. 
   - $49 \leqslant 57 < 64$ donc $a = \lfloor\sqrt{57}\rfloor = 7$.
   - $(2\sqrt{15})^2 = 60$ et $49 < 2\sqrt{15} < 64$ donc $b = \lfloor 2\sqrt{15}\rfloor = 7$.
   - $c^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 5 + 6 + 7 + 2\sqrt{5\times 6} + 2\sqrt{5\times 7} + 2\sqrt{6\times 7}$, or on trouve aussi
     - $\lfloor 2\sqrt{5\times 6}\rfloor = 10$, donc $10 \leqslant 2\sqrt{5\times 6} < 11$,
     - $\lfloor 2\sqrt{5\times 7}\rfloor = 11$, donc $11 \leqslant 2\sqrt{5\times 7} < 12$,
     - $\lfloor 2\sqrt{6\times 7}\rfloor = 12$, donc $12 \leqslant 2\sqrt{6\times 7} < 13$.

     Sommant tous les encadrements alors

$$\underbrace{5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 12}_{51} \leqslant c^2 < \underbrace{5 + 6 + 7 + 11 + 12 + 13}_{54} \qquad (8)$$

     donc $49 \leqslant c^2 < 64$ donc $c = 7$.