TD 2 correction
Méthodes de démonstration

Exercice 12. La contraposée est : si $x > 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$. Démontrons-le : Supposons $x > 0$. Posons par exemple $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$, et $x > \varepsilon$.
Ceci démontre la propriété voulue.

Exercice 13. Démontrons par double inclusion.

- Inclusion $E \supset F$: soit un élément $(x, y, z) \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = 5b - a$, $y = 1 + a + b$, $z = 1 + a - b$. On calcule alors

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= (5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) && (1)\\ &= 5b - a - 2 - 2a - 2b + 3 + 3a - 3b && (2)\\ &= 1 && (3) \end{aligned}$$

  ce qui démontre que $(x, y, z) \in E$.

- Inclusion $E \subset F$: soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose $x - 2y + 3z = 1$. Existe-t-il $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = 5b - a \\ y = 1 + a + b \\ z = 1 + a - b \end{cases} \iff \begin{cases} -a + 5b = x & (L_1) \\ a + b = y - 1 & (L_2) \\ a - b = z - 1 & (L_3) \end{cases} \quad ? \tag{4}$$

  (on le ré-écrit comme un système d'inconnues $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). Les deux première lignes par exemple déterminent d'uniques valeurs pour a et b : avec (L_1) on remplace $a = 5b - x$ dans (L_2) pour obtenir $6b - x = y - 1$ soit $b = \frac{x+y-1}{6}$, puis $a = 5b - x = \frac{-x+5y-1}{6}$. Ces valeurs vérifient-elles alors aussi (L_3) ? C'est le cas si et seulement si

$$\frac{-x + 5y - 1}{6} - \frac{x + y - 1}{6} = z - 1 \tag{5}$$

  c'est à dire $-x + 5y - 1 - x - y + 1 = 6z - 6$. Ceci est bien vérifiée par notre hypothèse $x - 2y + 3z = 1$, et donc $(x, y, z) \in F$.

En conclusion $E = F$.

Exercice 14.

- Analyse : supposons qu'on ait une telle fonction, c'est à dire qu'on ait $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel qu'en posant $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x - 1) = x^2$. On développe alors tout, notamment avec

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 && (6)\\ (x - 1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 && (7) \end{aligned}$$

  et on trouve que la condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x - 1) = x^2$ est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (6a)x^2 + (4b)x + (2a + 2c) = x^2 \tag{8}$$

  ce qui est vérifié dès que

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \tag{9}$$

  d'où on tire facilement $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{6}$ et d quelconque, prenons $d = 0$.

- Synthèse : posons $f : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$. C'est bien un polynôme de degré 3 et les calculs précédents montrent bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x - 1) = x^2$.

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2$ et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : «S_n = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}» \tag{10}$$

- Pour $n = 0$: $S_0 = 1$ et le terme de droite donne $\frac{1\times1\times3}{3} = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. On alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2(n + 1) + 1)^2 && && (11)\\ &= S_n + (2n + 3)^2 && \text{(attention)} && (12)\\ &= \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3} + (2n + 3)^2 && \text{(en utilisant } \mathcal{P}(n)\text{)} && (13)\\ &= \frac{(2n + 3)}{3}\Big((n + 1)(2n + 1) + 3(2n + 3)\Big) && \text{(réflexe, factoriser)} && (14) \end{aligned}$$

  On arrive d'une façon ou d'une autre à montrer que le terme est bien égal à $\frac{(2n+3)}{3}(n + 2)(2n + 5)$, et c'est bien égal au terme $\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ dans lequel on remplace n par $n + 1$. Ceci démontre donc bien $\mathcal{P}(n + 1)$.

Conclusion : par récurrence on a bien démontré $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 16. Soit $x \in [0, +\infty[$ (fixé, on n'y touche plus). Démontrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ ».

- Pour $n = 1$: c'est simplement $1 + x \geqslant 1 + x$, ce qui est évidemment vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Multiplions des deux côtés l'inégalité par $1 + x$, qui est bien positif, on obtient

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant (1 + x) \times (1 + nx) \tag{15}$$

et ce dernier terme ce simplifie en $1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$.
Il suffit alors de justifier $1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ pour conclure que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$. Mais c'est bien le cas car $nx^2 \geqslant 0$. Ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

En conclusion on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17. Si on fixe le premier nombre α rationnel, c'est effectivement la même chose que de démontrer que si β est irrationnel alors $\alpha + \beta$ est irrationnel. La contraposée de cette dernière assertion est : soit β un réel quelconque, si $\alpha + \beta$ est rationnel alors β est rationnel.
Mais en supposant $\alpha+\beta$ rationnel, il suffit d'écrire $\beta = (\alpha+\beta)-\alpha$, qui est bien rationnel si $\alpha + \beta$ et α le sont ! (Écrire $\alpha + \beta = \frac{p}{q}$ et $\alpha = \frac{u}{v}$ avec $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$, $q, v \neq 0$ alors $(\alpha + \beta) - \alpha = \frac{pv-qu}{qv}$.)
Ceci démontre donc par contraposée que si β n'est pas rationnel, alors $\alpha + \beta$ ne peut pas l'être.

Exercice 18. L'idée tourne autour de : si on suppose $E \in E$ on doit en déduire $E \notin E$, mais aussi si on suppose $E \notin E$ en doit en déduire $E \in E$. Tout cela est bien paradoxal. La conclusion de ce célèbre paradoxe est qu'**il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles**, et aussi qu'on ne peut pas prendre une propriété P et écrire $\{x \mid P(x)\}$ mais cet axiome de formation des ensembles s'écrit toujours $\{x \in E \mid P(x)\}$ où E est un ensemble dans lequel sont pris les éléments x. Pour cette raison aussi on évite de mettre des quantificateurs $\forall x$ sans indiquer dans quel ensemble est x ; et le complémentaire d'un ensemble A doit toujours être pris dans un plus gros ensemble E et pas dans « tout ».

Exercice 19.
1. $E = \mathbb{N}$ signifie précisément : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.
2. Dans ce cas : $\exists n \in \mathbb{N}$, non$(\mathcal{P}(n))$. Or par définition $\overline{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{non}(\mathcal{P}(n))\}$. Cela signifie donc que $\overline{E}$ est non-vide. Par l'axiome admis au début de l'exercice, $\overline{E}$ admet un plus petit élément qu'on note $m \in \mathbb{N}$ (a priori $m \geqslant 0$, donc). Mais on sait que $\mathcal{P}(0)$ est vraie donc en fait $m \neq 0$, ainsi $m > 0$.
3. $m - 1 \in \mathbb{N}$ est inférieur au plus petit élément pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse : c'est donc que $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie. Par la propriété d'hérédité de $\mathcal{P}$ on en déduit que $\mathcal{P}(m)$ est aussi vraie.
4. On aboutit au fait que $\mathcal{P}(m)$ est à la fois fausse et vraie : c'est une contradiction. C'est donc que l'hypothèse faite dans la question 2 est fausse, et donc qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.