

TD 1 correction

Logique

Exercice 9. 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$ (la négation de $\exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$)
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (m \neq m \Rightarrow u_n \neq u_m)$
6. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n = 0)$

Exercice 10. • (P_1) : La fonction f s'annule (au moins une fois).

non(P_1) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

• (P_2) : La fonction f est croissante.

non(P_2) : $\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 \leq x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2))$

• (P_3) : La fonction f est constante.

non(P_3) : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$

• (P_4) : L'équation $f(x) = y$ admet toujours au moins une solution, quelque soit la valeur de y ; graphiquement, toute droite horizontale (avec y fixé) coupe le graphe de f ; ce n'est pas le cas des fonctions $x \mapsto x^2$, ou $x \mapsto e^x$, ou $x \mapsto \sin(x)$, mais c'est le cas de $x \mapsto x^3$ ou d'une fonction affine non-constante. La fonction f est dite *surjective*.

non(P_4) : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$.

• (P_5) : La fonction f est périodique.

non(P_5) : Négation : $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$

• (P_6) : C'est la définition de la continuité, en tout $a \in \mathbb{R}$.

non(P_6) : $\exists a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$