Méthode des rectangles au milieu

Le but de ce problème est d'étudier l'erreur commise lors de l'approximation de l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles au milieu.

On fixe un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose $\mathcal{C}^2$.

Partie A : étude sur un seul intervalle

Dans un premier temps, on ne subdivise pas du tout l'intervalle ; on approxime donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

et on pose $m = \frac{a+b}{2}$.

1 Montrer que l'approximation ci-dessus est exacte si f est une fonction affine.

2 Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b \big(f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\big)\,\mathrm{d}x$$

3 Justifier que f'' est bornée sur $[a, b]$.

On pose alors $M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

4 Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [a, b]$ fixé. On pose $g : t \mapsto f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - A(x-t)^2$.

4.a Justifier que g est dérivable sur $[a, b]$ et calculer g'.

4.b Si $x \neq m$, montrer qu'on peut choisir A tel que $g(m) = g(x) = 0$ et exprimer A en fonction de m et x.

4.c Pour $x > m$, en déduire qu'il existe un nombre $c_x \in \,]m, x[$ tel que

$$f(x) = f(m) + (x-m)f'(m) + \frac{(x-m)^2}{2} f''(c_x)$$

puis que

$$\big|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)\big| \leqslant \frac{(x-m)^2}{2} M$$

4.d Justifier soigneusement que l'inégalité ci-dessus est vraie aussi si $x = m$ et si $x < m$.

5 En déduire l'inégalité

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} M$$

Partie B : subdivisons

On applique maintenant cette méthode sur chaque intervalle d'une subdivision régulière. On fixe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

6 Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right)$$

7 Justifier soigneusement qu'on peut appliquer la méthode de la partie précédente sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et qu'on obtient

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^3} M$$

8 En déduire la majoration de l'erreur par la méthode des rectangles au milieu :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} M$$

Partie C : calculs sur un exemple

On souhaite maintenant appliquer cette méthode pour donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$.

9 Calculer I.

10 Écrire une fonction Python `f(x)` qui calcule la valeur de cette fonction f en x.

11 Écrire une fonction `intégrale(n)` qui donne une valeur approchée de I par la méthode des rectangles au milieu avec n rectangles.

12 On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes en posant

$$P_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$$

12.a Calculer P_1 et P_2.

12.b Calculer f' et f''.

12.c Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

12.d Démontrer par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et son coefficient dominant qu'on note α_n est égal à $(-1)^n \times 2(n+1)!$.

12.e Calculer et factoriser P_3.

12.f Tracer le tableau de variations de f'' sur $\mathbb{R}$.

12.g Montrer que le maximum de $|f''|$ sur $[-1,1]$ est 4.

13 **13.a** Écrire une fonction `seuil(epsilon, a, b, M)` qui prend en argument un nombre réel ε supposé strictement positif, deux nombres réels a, b avec $a < b$ et un nombre M positif, et renvoie le plus petit entier naturel n pour lequel $\frac{(b-a)^3}{24n^2}M < \varepsilon$.

13.b En déduire une fonction `nombre_préféré_lefèvre(epsilon)` qui donne une approximation de I obtenue par la méthode des rectangles milieu avec un écart garanti strictement inférieur à ε.