Correction
Méthode des rectangles au milieu

Partie A : étude sur un seul intervalle

1 On prend $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $f : x \mapsto px+q$ *(attention à ne pas poser $f : x \mapsto ax+b$: ce ne sont pas les mêmes a et b)*. Il s'agit de calculer les deux membres ci-dessus et de montrer qu'ils sont égaux. Mais d'une part

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b px\,\mathrm{d}x + \int_a^b q\,\mathrm{d}x \\ &= \left[p\frac{x^2}{2}\right]_a^b + q(b-a) \\ &= \frac{p}{2}(b^2-a^2) + q(b-a)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(b-a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= (b-a)\times\left(p\frac{a+b}{2}+q\right) \\ &= \frac{p}{2}\times(b-a)\times(a+b) + (b-a)\times q\end{aligned}$$

mais dans cette dernière ligne $(b-a)(a+b) = b^2-a^2$ et on voit bien que les deux expressions sont égales. Donc la formule est exacte.

2 Partant du terme de droite, par linéarité :

$$\int_a^b \Big(f(x)-f(m)-(x-m)f'(m)\Big)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{A} - \underbrace{\int_a^b f(m)\,\mathrm{d}x}_{B} - \underbrace{\int_a^b (x-m)f'(m)\,\mathrm{d}x}_{C}$$

Or A est bien un bout du terme voulu et B (où $f(m)$ est une constante) est $(b-a)\times f(m)$ avec $m = \frac{a+b}{2}$. Il s'agit donc en fait de montrer que le terme $C = 0$. Or

$$\begin{aligned}C &= f'(m)\times\int_a^b (x-m)\,\mathrm{d}x \\ &= f'(m)\times\left[\frac{(x-m)^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{f'(m)}{2}\times\Big((b-m)^2-(a-m)^2\Big)\end{aligned}$$

Mais m est le milieu ce qui signifie

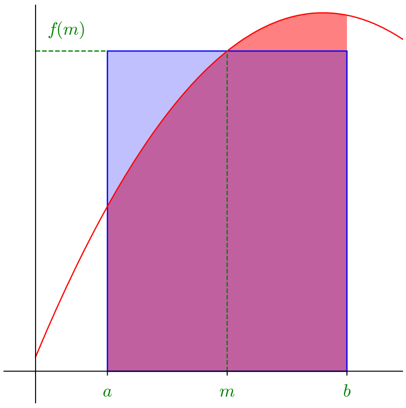
$$b-m = b-\frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

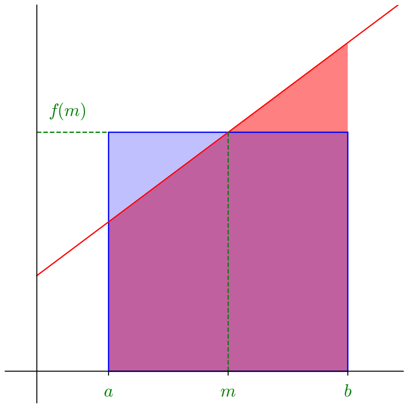
et de même

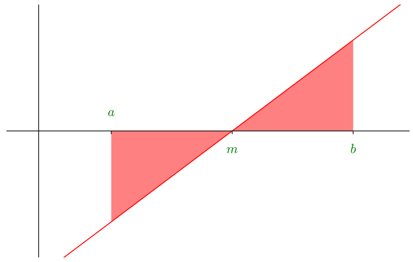
$$a-m = a-\frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = -\frac{b-a}{2}$$

Donc les deux termes sont égaux : $(b-m)^2 = (a-m)^2$ et ainsi $C=0$. Ceci démontre l'égalité voulue.

L'interprétation graphique est la suivante.







À gauche : le cas général, une fonction continue sur $[a, b]$ et le rectangle pris au point milieu m.

Au milieu : le cas d'une fonction affine. L'aire du trapèze délimité sous la courbe (rouge) est exactement égale à l'aire du rectangle passant par le milieu (bleu), car les aires des triangles dépassant de part et d'autre du milieu se compensent exactement !

À droite : le cas d'une fonction affine passant par le milieu (comme $x \mapsto (x-m)f'(m)$). L'aire sous la courbe (en rouge) est nulle car les aires des deux triangles se compensent exactement.

C'est précisément à cause de ces intuitions que la méthode des rectangles au milieu (et exactement au milieu, pas ailleurs) va se révéler plus efficace que la méthode des rectangles à gauche ou à droite.

3 f est $\mathcal{C}^2$ donc f'' est continue, sur l'intervalle $[a, b]$ qui est bien fermé, borné, non vide. Donc par le **théorème des bornes**, f'' est bien bornée.

4 **4.a** Dans l'expression de g apparaissent des constantes (ce qui dépend seulement de x, qui ne bouge pas, car on dérive par rapport à t) et des opérations usuelles sur $f(t)$, $f'(t)$. Mais f est $\mathcal{C}^2$ donc en particulier f' est encore dérivable. Ainsi g est bien dérivable. On calcule alors

$$\begin{aligned}\forall t \in [a, b], \quad g'(t) &= -f'(t) - \Big(-f'(t) + (x-t)f''(t)\Big) + 2A(x-t) \\ &= -(x-t)f''(t) + 2A(x-t)\end{aligned}$$

4.b D'abord $g(x) = 0$ est automatique. L'équation $g(m) = 0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & 0 = f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) - A(x-m)^2 \\ \iff & A(x-m)^2 = f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) \\ \iff & A = \frac{f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)}{(x-m)^2}\end{aligned}$$

et (on divise par $(x-m)^2 \neq 0$) cela donne bien une unique valeur de A. Cette valeur dépend de x et de m, qui sont fixés, mais pas de t, donc on peut bien l'utiliser dans la question précédente.

4.c On applique alors le **théorème de Rolle**, avec cette valeur de A déterminée : la fonction g vérifie $g(m) = g(x) = 0$, est bien continue sur $[m, x]$ et est bien dérivable sur ce même intervalle (car dérivable sur tout $[a, b]$, encore une fois c'est parce que f est $\mathcal{C}^2$). Il existe donc un $c_x \in]m, x[$ tel que $g'(c_x) = 0$. Mais cela donne

$$\begin{aligned} & 0 = g'(c_x) \\ \iff & 0 = -(x-c_x)f''(c_x) + 2A(x-c_x) \\ \iff & f''(c_x) = 2A \\ \iff & f''(c_x) = 2\frac{f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)}{(x-m)^2} \\ \iff & f(x) - f(m) - (x-m)f'(m) = \frac{(x-m)^2}{2} f''(c_x)\end{aligned}$$

et donc c'est bien l'égalité voulue, quitte à passer des termes à droite ou à gauche.

Enfin on a par définition $|f''(c_x)| \leqslant M$ (sur tout $[a, b]$), et $(x-m)^2 \geqslant 0$ donc

$$\Big|f(x)-f(m)-(x-m)f'(m)\Big| \leqslant \left|\frac{(x-m)^2}{2}f''(c_x)\right| \leqslant \frac{(x-m)^2}{2}M$$

4.d Attention à l'ordre logique des questions.

Pour $x=m$, on ne peut pas trouver la constante A ni appliquer le théorème de Rolle. Mais en remplaçant x par m l'inégalité ci-dessus est $|0| \leqslant 0$ qui est bien vraie.

Pour $x<m$, le même raisonnement que précédemment s'applique mais c_x est dans l'intervalle $]x,m[$. Cela ne change pas que $(x-m)^2 \geqslant 0$ et donc le même calcul reste valable.

5 En résumé on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&= \left|\int_a^b \Big(f(x)-f(m)-(x-m)f'(m)\Big)\,\mathrm{d}x\right| && \text{(question 2)} \\
&\leqslant \int_a^b \Big|f(x)-f(m)-(x-m)f'(m)\Big|\,\mathrm{d}x && \text{(inégalité triangulaire pour } \textstyle\int) \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(x-m)^2}{2}M\,\mathrm{d}x && \text{(majoration précédente)}
\end{aligned}$$

et il ne reste qu'à calculer le terme de droite. On y arrive, plus ou moins naïvement :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{(x-m)^2}{2}M\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x-m)^3}{6}M\right]_a^b \\
&= \frac{M}{6}\Big((b-m)^3-(a-m)^3\Big) \\
&= \frac{M}{6}\left(\left(\frac{(b-a)}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{M}{6}\left(\frac{(b-a)^3}{8}+\frac{(b-a)^3}{8}\right) \\
&= \frac{M}{6}\left(2\times\frac{(b-a)^3}{8}\right) \\
&= \frac{(b-a)^3}{24}M
\end{aligned}$$

Cette formule finale exprime précisément une majoration de l'écart entre l'intégrale de f sur $[a,b]$ et l'aire d'un gros rectangle basé sur $[a,b]$ et de hauteur la valeur de f prise au milieu m. Si elle ne semble pas si excitante, le but est de l'appliquer ensuite sur chaque intervalle d'une subdivision.

Partie B : subdivisons

6 Par la **relation de Chasles** pour une subdivision

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cela permet alors de regrouper en une seule somme (linéarité pour $\sum$) :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

7 Le membre de gauche est exactement celui de la partie précédente où on remplace a par x_k et b par x_{k+1}. Sur cet intervalle f est toujours $\mathcal{C}^2$ et $|f''|$ est toujours majorée par M (puisque M est un majorant sur $[a,b]$ tout entier). Cette fois-ci la longueur de l'intervalle est $x_{k+1}-x_k$ (qui va jouer le rôle de $b-a$) qui est égal à $\frac{b-a}{n}$ et donc on trouve

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 M$$

et le terme de majoration est alors bien égal à $\frac{(b-a)^3}{24n^3}M$.

8 Bien que les calculs et les manipulations puissent faire peur, il suffit de résumer ce qui a été fait avant, tout étant déjà mis sous la bonne forme :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\right| && \text{(question 6)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| && \text{(inégalité triangulaire pour } \textstyle\sum\text{)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{24n^3}M && \text{(question précédente)}\\
&= n\times\frac{(b-a)^3}{24n^3}M && \text{(somme de } n \text{ termes égaux)}\\
&= \frac{(b-a)^3}{24n^2}M
\end{aligned}$$

La méthode est intéressante ; cette partie B fonctionne essentiellement de la même manière pour toutes les autres méthodes d'intégration vues. La différence est que la méthode des rectangles à gauche ou à droite n'est même pas exacte pour une fonction affine (en fait seulement pour une fonction constante) et les calculs de la partie A sont plus faciles. On avait trouvé une majoration de la forme $\frac{(b-a)^2}{2n}M$ *où* M *était une borne sur* $|f'|$.

Concrètement, une majoration en $1/n$ *signifie qu'en multipliant* n *(le nombre de rectangles) par* 10 *on réduit l'écart d'environ* $1/10$ *soit un gain d'une décimale sur le résultat, alors qu'avec une majoration en* $1/n^2$ *on réduira l'écart d'un facteur* $1/100$ *et donc on gagne deux décimales... La méthode des rectangles au milieu converge donc sensiblement plus rapidement, et on obtient une meilleur approximation de l'intégrale en utilisant moins de rectangles.*

Partie C : calculs sur un exemple

9 On rappelle qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan(x)$, qui est la fonction réciproque de tan, qui est impaire comme elle, avec $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned}I &= \Big[2\arctan(x)\Big]_{-1}^{1}\\ &= 2\arctan(1) - 2\arctan(-1)\\ &= 2\times\frac{\pi}{4} - 2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \pi\end{aligned}$$

On intègre une fonction paire *sur un intervalle symétrique autour de* 0*. Le résultat est donc le double de l'intégrale de* 0 *à* 1*. La fonction sous l'intégrale est d'ailleurs strictement positive, donc dans le calcul avec les primitives le résultat ne peut pas se compenser et s'annuler, au contraire.*

10 Sans commentaires.

```
def f(x):
    return 2 / (1 + x**2)
```

11 On rappelle juste que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ soit $\frac{2}{n}$ ici et que $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}$ soit ici $-1 + \frac{(2k+1)}{n}$. Il s'agit donc de calculer une somme (sur n rectangles, $n+1$ points de subdivision, k de 0 à $n-1$ c'est à dire en Python `range(n)`… pas de piège, tout est dans le bon sens !).

```
def intégrale(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + f(-1 + (2*k+1)/n)
    return 2 * S / n
```

12 **12.a** On calcule $P_1 : x \mapsto -4x$ et $P_2 : x \mapsto 12x^2 - 4$.

12.b Avec la règle usuelle de dérivée d'un inverse, on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Pour calculer alors f'', on peut dériver comme un quotient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) &= -\frac{4\times\left(1+x^2\right)^2 - (4x)\times 2\times 2x\times\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}\\ &= -\frac{4(1+x^2) - 16x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\\ &= \frac{12x^2-4}{\left(1+x^2\right)^3}\end{aligned}$$

12.c D'abord $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et ce terme est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par quotient (opérations usuelles), f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} \text{ »}$$

Pour $n = 0$ alors $f^{(0)} = f$, or $P_0 : x \mapsto 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Pour calculer $f^{(n+1)}$ il est plus pratique d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)\left(1+x^2\right)^{-(n+1)}$$

Dérivons alors cette relation comme un produit : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'(x)(1+x^2)^{-(n+1)} + P_n(x) \times (-(n+1)) \times 2x \times (1+x^2)^{-(n+1)-1} \\ &= \frac{P_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

en réduisant au même dénominateur dans la dernière étape. On voit alors apparaitre le polynôme P_{n+1} au numérateur. Ceci démontre bien $\mathcal{P}(n+1)$.

12.d *On constate, et on démontre aisément, que P_n est toujours de degré* inférieur ou égal *à n. En effet dans la relation définisssant P_{n+1}, le terme $(1+x^2)P_n'(x)$ sera de degré un de plus (dériver diminue le degré de 1, multiplier par x^2 l'augmente de 2) et le terme $2(n+1)xP_n(x)$ sera aussi de degré un de plus à cause de la multiplication par x. Donc si P_n est bien de degré n, alors P_{n+1} pourra être de degré $n+1$...*

Sauf que nous sommes précisément dans le cas où P_{n+1} est donné par une différence de deux polynômes a priori de mêmes degrés et donc les termes en x^n de chaque côté pourraient s'annuler et on ne peut pas conclure exactement sur le degré de P_{n+1} sans s'intéresser en même temps *aux coefficients dominants ! Voilà pourquoi on est obligés, dans la récurrence, d'introduire le coefficient dominant α_n de P_n, qu'on suppose non-nul, et on vérifie alors que le coefficient dominant de P_{n+1} est bien un coefficient α_{n+1} non-nul devant x^{n+1}. Ce faisant, on découvre en fait la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = -(n+2)\alpha_n$, d'où on vérifie aisément que α_n est bien égal à celui qui est donné.*

Cela étant dit, autant tout démontrer d'un coup dans une seule récurrence.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suggérée par l'énoncé, c'est-à-dire que P_n est de degré n et qu'on peut écrire

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \cdots \qquad \text{où} \qquad \alpha_n = (-1)^n \times 2(n+1)!$$

Pour $n = 0$ c'est bien le cas car $P_0 : x \mapsto 2$ est de degré 0 et $\alpha_0 = 2$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n. Dans la relation de récurrence définissant P_{n+1}, si on ne garde que les termes dominants, alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (1+x^2)(n\alpha_n x^{n-1} + \cdots) - 2(n+1)x(\alpha_n x^n + \cdots) \\ &= n\alpha_n x^{n+1} - 2(n+1)\alpha_n x^{n+1} + \cdots \\ &= -(n+2)\alpha_n x^{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

Alors : d'une part, par hypothèse $\alpha_n \neq 0$ et donc $-(n+2)\alpha_n \neq 0$. On en déduit que P_{n+1} est bien de degré $n+1$ et que son coefficient dominant α_{n+1} est égal à $-(n+2)\alpha_n$. Puis d'autre part, en ayant par hypothèse de récurrence $\alpha_n = (-1)^n \times 2(n+1)!$ on trouve alors directement bien $\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1} \times 2(n+2)!$. Donc la propriété est bien vraie au rang $n+1$.

12.e Avec $P_2 : x \mapsto 12x^2 - 4$ et la relation de récurrence, on calcule P_3 en essayant de garder factorisé :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_3(x) &= (1+x^2) \times 24x - 2 \times 3 \times x \times (12x^2 - 4) \\ &= 24\Big(x(1+x^2) - x(3x^2-1)\Big) \\ &= 24 \times x \times (2 - 2x^2) \\ &= 48x(1-x)(1+x) \end{aligned}$$

Si on s'y prend bien, on a factorisé une fois par x puis utilisé $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ et ainsi P_3 est factorisé.

12.f On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{(1+x^2)^3} = 4 \times \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$$

et pour tracer son tableau de variations il faut le signe de sa dérivée c'est à dire le signe de $f^{(3)}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{P_3(x)}{(1+x^2)^4} = 48 \times \frac{x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^4}$$

Le tableau de signe de $f^{(3)}$ s'obtient alors directement. De plus on calcule aisément les valeurs remarquables (attention à leur signe) et les limites.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

12.g Le tableau de variations montre bien que $\forall x \in [-1, 1]$, $-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1$. Donc en valeur absolue le maximum est $+4$, atteint en $x = 0$.

13 **13.a** Classique aussi, il faut savoir faire, avec une boucle `while` telle que *quand la boucle se termine* alors la condition $< \varepsilon$ est vérifiée, donc la boucle continue *tant que* le terme est $\geqslant \varepsilon$:

```python
def seuil(epsilon, a, b, M):
    n = 1 # on ne peut pas mettre 0 car on divise par n
    while (b-a)**3 * M / (24 * n**2) >= epsilon:
        n = n + 1
    return n
```

13.b Dès que $\frac{(b-a)^3}{24n^2}M < \varepsilon$ alors l'écart entre l'approximation avec n rectangles et I est garanti exact avec un écart strictement inférieur à ε, c'était le but de la partie 2. Ici $a = -1$, $b = 1$, et on peut prendre pour M le maximum de $|f''|$ c'est à dire $M = 4$ (obtenir ce majorant n'était pas si facile, mais nécessaire). Le terme $\frac{(b-a)^3}{24n^2}M$ est donc en fait égal à $\frac{2^3}{24n^2} \times 4 = \frac{4}{3n^2}$ (mais on n'a pas besoin de ce calcul car on a la fonction précédente). On conclut donc sans commentaire aucun.

```python
def nombre_préféré_lefèvre(epsilon):
    n = seuil(epsilon, -1, 1, 4)
    return integrale(n)
```

On peut d'ailleurs tester la fonction :

```python
>>> nombre_préféré_lefèvre(1e-6)
3.141593651342856
```

Approximation de π exacte avec à 10^{-6} près (c'est à dire en fait 5 décimales garanties exactes, les 14159 — la 6ème pourrait être 2 ou 3 ou 4). Ici le seuil est $n = 578$.