Programme de colle 12
15 au 19 décembre 2025

Notions

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

Chapitre 10 : Systèmes linéaires

- Notion de système linéaire, matrice des coefficients, second membre, homogénéité, compatibilité.
- Les trois opérations élémentaires, l'algorithme du pivot de Gauss, système échelonné, inconnues principales et inconnues libres, équations principales et conditions de compatibilité, rang, systèmes de Cramer.

Chapitre 11 : Dénombrement

- Ensembles finis, cardinal, inclusion, intersection. Applications injectives, surjectives, bijectives, entre ensembles finis.
- Cardinaux des constructions usuelles sur les ensembles : union d'ensembles deux à deux disjoints, partition, produit cartésien, listes d'éléments de E, applications $E \to F$, listes sans répétitions, permutations. Parties de E à k éléments, toutes les parties de E.
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Savoir-faire

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Échelonner et résoudre un système linéaire. Utiliser les opérations élémentaires. Donner le rang, les conditions de compatibilité, les inconnues libres.
- Étudier des systèmes linéaires avec un ou des paramètres.
- Dénombrer dans de nombreuses situations concrètes, notamment en se ramenant aux constructions sur les ensembles.
- Exemples de situations traitées : asseoir des gens, former des groupes de gens, jeux de 32 cartes, former des mots, anagrammes, …

Questions de cours

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- (exercice) Donner toutes les solutions de $\mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} 4x+6y=\lambda x \\ -x-y=\lambda y \end{cases}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (exercice) Soit E l'ensemble des polynômes de degré au plus 2, soit l'application $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$. Montrer avec un système linéaire que φ est bijective puis donner l'application réciproque.
- (exercice) *Idem* avec $\psi : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P'(2), P(3)) \end{cases}$. Montrer que ψ n'est ni injective ni surjective puis donner tous les antécédents de $(0, 0, 0)$ par ψ.
- $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
- Si les $(A_1, …, A_n)$ sont deux à deux disjonts ($n \in \mathbb{N}^*$) alors $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Card}(A_i)$.
- $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$
- Cardinal de l'ensemble des parties de E via les fonctions indicatrices : $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E \\ A \quad \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$ est une bijection.