

Programme de colle 10

1 au 5 décembre 2025

Notions

↪ En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.

Chapitre 8 : Applications

- Notion d'application, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, égalité d'applications, image, antécédent, graphe, fonctions, domaine de définition d'une fonction.
- Image directe, image réciproque, d'un ensemble par une application.
- Application identité. Application constante. Opération de restriction. Application caractéristique d'une partie.
- Opération de composition, non-commutativité, élément neutre, associativité.
- Applications injectives, surjectives, bijectives. Inverse pour la composition, composition de bijections.
- Cas des fonctions réelles, rappels sur le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection, construction des fonctions trigonométriques réciproques.

Chapitre 9 : Étude de fonctions

- Opérations sur les fonctions, domaine de définition.
- Notions générales d'étude de fonctions : croissance, majoration, extrema, dérivée et sens de variation, parité, périodicité.
- Représentation graphique, lien avec les opérations sur les fonctions, symétries du graphe, droites remarquables, tangentes, asymptotes.
- Fonctions usuelles : fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, puis avec $n \in \mathbb{Z}$, fonctions racines, logarithme et exponentielle, puissances réelles, fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, exponentielle de base quelconque $x \mapsto a^x$ avec $a \in]0, +\infty[$, fonctions trigonométriques et leur réciproque, valeur absolue, partie entière.

Savoir-faire

↪ Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.

- Composer des applications.
- Étudier une image directe ou une image réciproque par une application.
- Étudier l'injectivité ou la surjectivité d'une application. Donner l'image, donner la bijection réciproque.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection pour étudier des applications réelles.
- Donner le domaine de définition d'une fonction.
- Étudier une fonction, tracer un tableau de variations, calculer des dérivées et des limites. *Il s'agit essentiellement de révisions de lycée car ces thèmes feront l'objet de chapitres à part entière.*
- Démontrer des inégalités avec une étude de fonction.
- Étudier la parité, étudier la périodicité.
- Connaitre les fonctions usuelles, leurs propriétés, et tracer leur graphe.

Questions de cours

↪ Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.

- (exercice) Démontrer $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (pour $1 \leq k \leq n$), application au calcul de $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k}$.
- Élément neutre et associativité pour la composition d'applications.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors f est injective ; et (supposant f continue, admettant alors que $J = f(I)$ est un intervalle) $f^{-1} : J \rightarrow I$ est strictement croissante.
- (exercice) Étude de $\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer avec un tableau de variations que sh est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puis donner l'expression de la bijection réciproque.
- (exercice) Étude de $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer avec un tableau de variations que ch induit une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, puis donner l'expression de la bijection réciproque.
- (exercice) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
- Définition de a^b (a, b réels), et propriétés usuelles $a^b \times a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{b \times c}$ et $(a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.