

# DS 8 Mathématiques correction

## Problème 1

1 Pour  $n = 0$  : c'est

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue car les limites à droite et à gauche ne coïncident pas en 1 et en  $-1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

Si  $n > 0$ , alors  $f$  est clairement continue sur  $]-\infty, -1[$ , sur  $]-1, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ . Le terme  $(1 - x^2)^n$  prend bien la valeur 0 en  $x = 1$  et en  $x = -1$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

et ainsi  $f$  est continue en 1 et en  $-1$  (*recollement continu*).

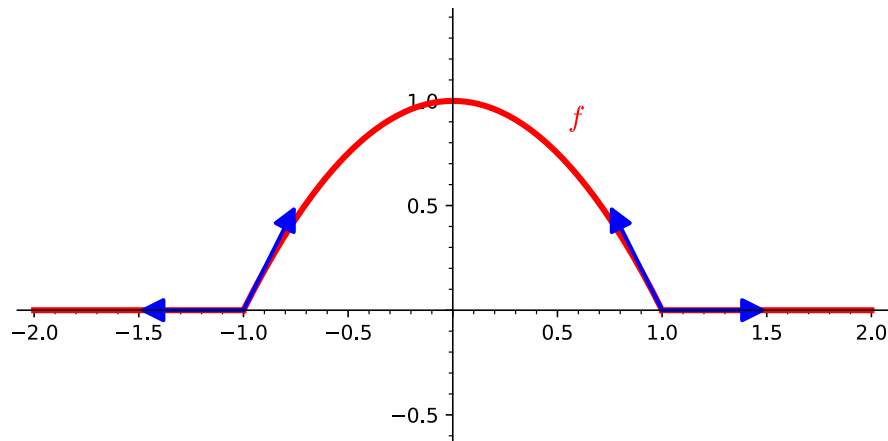
En conclusion  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $n \geq 1$ .

**2 2.a** D'abord en 1. Par définition  $f'_d(1)$  est calculé comme la limite du taux de variations de la fonction  $x \mapsto 0$  en  $x = 1$ . C'est donc  $f'_d(1) = 0$ . Par contre  $f'_g(1)$  est calculé comme la limite du taux de variations de  $x \mapsto 1 - x^2$  en  $x = 1$ , c'est donc la dérivée de  $x \mapsto 1 - x^2$  prise en  $x = 1$ . Or  $\frac{d(1-x^2)}{dx} = -2x$  et donc  $f'_g(1) = -2$ .

De même en  $-1$ , on trouve  $f'_g(-1) = 0$  et  $f'_d(-1)$  est la valeur en  $x = -1$  de  $-2x$  soit  $f'_d(-1) = 2$ .

**2.b**  $f'_g(1) \neq f'_d(1)$  et de même  $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$  donc  $f$  n'est pas dérivable en 1 et en  $-1$ .

**2.c** Entre  $-1$  et 1, la fonction  $f$  ressemble à une parabole tournée vers le bas, passant par le point  $(0, 1)$ . Il serait fort dommage de ne pas mettre en valeur les deux demi-tangentes calculées ci-dessus pour faire apparaître les points de non-dérivabilité...



**3** Dans ce cas  $f$  est  $x \mapsto (1 - x^2)^2$  sur  $[-1, 1]$ .

**3.a** D'abord par les opérations usuelles,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty, -1[$ , sur  $]-1, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ , et on calcule

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f'(x) = -2x(1 - x^2)$$

Il reste à étudier la dérivabilité en 1 et en  $-1$ . Comme précédemment,  $f'_d(1) = 0$  et  $f'_g(-1) = 0$ . Les dérivées à gauche en 1 et à droite en  $-1$  se calculent avec la formule ci-dessus qui donne aussi 0 :  $f'_g(1) = 0$  et  $f'_d(-1) = 0$ . Donc  $f$  est bien dérivable en 1 et en  $-1$ . Alors  $f'$  est donnée par

$$f' : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -2x(1 - x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Alors  $f'$  est continue en 1 et en  $-1$  car

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

En résumé  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ce qui signifie que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 3.b** Avec la formule ci-dessus on trouve  $(f')'_d(1) = 0$ . Mais  $(f')'_g(1)$  se calcule à partir du taux de variations de  $x \mapsto -2x(1-x^2)$  et est la valeur en 1 de

$$\frac{d(-2x(1-x^2))}{dx} = -2(1-x^2) + 4x^2$$

ainsi  $(f')'_g(1) = 4$ . De même on a directement  $(f')'_g(-1) = 0$  et on calcule  $(f')'_d(-1) = 4$ . En conclusion

$$(f')'_d(1) = 0 \neq (f')'_g(1) = 4 \quad \text{et} \quad (f')'_g(-1) = 0 \neq (f')'_d(-1) = 4$$

donc  $f'$  n'est pas dérivable en 1 et en  $-1$ .

- 4 4.a** Démontrons par récurrence sur  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$  la propriété : il existe un polynôme  $P_k$  tel que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k n!}{(n-k)!} x^k (1-x^2)^{n-k} + P_k(x) (1-x^2)^{n-k+1}$$

Pour  $k = 0$  : il s'agit de trouver un polynôme  $P_0$  tel que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (1-x^2)^n = (1-x^2)^n + P_0(x) (1-x^2)^{n+1}$$

On voit qu'il suffit de poser  $P_0 = 0$ .

Soit maintenant  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$  (on a alors  $0 \leq k+1 \leq n$ ). Supposons avoir construit  $P_k$ , dérivons la relation vérifiée par  $f^{(k)} : \forall x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-2)^k n!}{(n-k)!} \left[ kx^{k-1} (1-x^2)^{n-k} + x^k \times (n-k) \times (-2x) \times (1-x^2)^{n-k-1} \right] \\ &\quad + P'_k(x) (1-x^2)^{n-k+1} + P_k(x) \times (n-k+1) \times (-2x) \times (1-x^2)^{n-k} \end{aligned}$$

En développant, cela donne :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-2)^k n!}{(n-k)!} \times (-2) \times (n-k) \times x^{k+1} (1-x^2)^{n-k-1} \\ &\quad + \frac{(-2)^k n!}{(n-k)!} \times kx^{k-1} (1-x^2)^{n-k} + P'_k(x) (1-x^2)^{n-k+1} - 2x(n-k+1)P_k(x) (1-x^2)^{n-k} \end{aligned}$$

Seul le tout premier morceau se regroupe comme on veut en  $\frac{(-2)^{k+1} n!}{(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x^2)^{n-k-1}$ , tout le reste doit donc être factorisé par  $(1-x^2)^{n-k}$ , et on aura bien la forme voulue au rang  $k+1$  :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-2)^{k+1} n!}{(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x^2)^{n-k-1} \\ &\quad + (1-x^2)^{n-k} \underbrace{\left[ \frac{(-2)^k k n!}{(n-k)!} x^{k-1} + P'_k(x) (1-x^2) - 2x(n-k+1)P_k(x) \right]}_{P_{k+1}(x)} \end{aligned}$$

On pose alors pour  $P_{k+1}$  le polynôme qui apparaît ci-dessus. C'est bien un polynôme car on manipule des opérations sur les polynômes (dériver, multiplier par  $1-x^2$  ou par  $x$ ), en particulier il n'y a pas de puissances négatives de  $x$  ou de  $1-x^2$ . Éventuellement si  $k=0$  il y a un terme  $x^{-1}$  mais avec un coefficient nul devant (la formule de dérivation  $\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$  peut être considérée valable pour  $k=0$  même si on préfère l'exclure car il s'agit simplement de la dérivée d'une constante, qui est nulle).

Cela termine la récurrence.

- 4.b** On démontre d'abord par récurrence sur  $k$  tel  $0 \leq k \leq n-1$  la propriété «  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$  » :

Pour  $k=0$ , alors comme  $n \geq 1$ , c'est la question **1** :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  avec  $f(1) = f(-1) = 0$ .

Soit maintenant  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-2$  et supposons vraie la propriété de récurrence. Toujours par la même méthode, on a toujours

$$(f^{(k)})'_d(1) = 0 \quad \text{et} \quad (f^{(k)})'_g(1) = 0$$

mais par la formule précédente, tant que  $k+1 < n$ , les valeurs en 1 et en  $-1$  s'annulent et on déduit

$$(f^{(k)})'_g(1) = 0 \quad \text{et} \quad (f^{(k)})'_d(1) = 0$$

Donc  $f^{(k)}$  est dérivable en 1 et en  $-1$  et  $f^{(k+1)}(1) = f^{(k+1)}(-1) = 0$ . En conclusion  $f^{(k)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Mais une fois établie la dérivabilité, alors la formule pour  $f^{(k+1)}$  est bien un recollement continue sur  $\mathbb{R}$  : en 1 comme en  $-1$ , les limites à gauche et à droite sont toutes les deux égales à 0. Donc  $f^{(k+1)}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , et donc  $f$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Ceci termine la récurrence.

Une fois la récurrence terminée, on étudie  $f^{(n-1)}$ , qui est bien une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Cette fois-ci, on a

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f^{(n)}(x) = (-2)^n x^n + P_n(x)(1-x^2)$$

Alors encore une fois on déduit :

$$(f^{(n-1)})'_d(1) = 0 \quad \text{et} \quad (f^{(n-1)})'_g(1) = (-2)^n$$

donc  $f^{(n-1)}$  n'est pas dérivable en 1. De même

$$(f^{(n-1)})'_g(-1) = 0 \quad \text{et} \quad (f^{(n-1)})'_d(-1) = 2^n$$

donc  $f^{(n-1)}$  n'est pas dérivable en  $-1$ .

## Problème 2

1 **1.a** Soit on tire d'abord la boule numéro 1 (alors c'est fini), soit la 2 (et au coup d'après on tire 1 et c'est fini). On trouve donc  $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$  : c'est une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ .

1.b On trouve alors

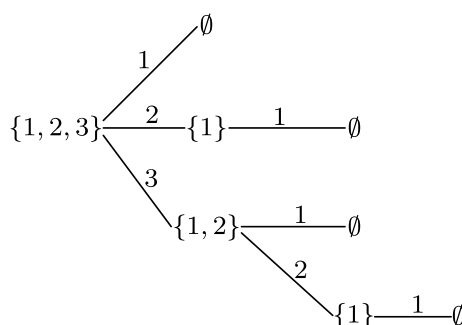
$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

On calcule aussi

$$\mathbb{E}(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

d'où par la formule de **König-Huygens**  $\text{Var}(X_2) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2$  soit  $\text{Var}(X_2) = \frac{1}{4}$ .

2 Pour tracer un arbre, on place aux intersections les compositions de l'urne, et sur les branches le numéro de boule tirée.



Après calcul on trouve

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}$$

Alors

$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

puis

$$\mathbb{E}(X_3^2) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

d'où par König-Huygens  $\text{Var}(X_3) = \frac{17}{36}$ .

- 3  $(X_n = 1)$  signifie que l'expérience s'arrête après 1 tirage, donc qu'on a tiré la boule numérotée 1 du premier coup. Sa probabilité est alors  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ .

$(X_n = n)$  signifie que l'expérience s'est arrêtée après  $n$  tirages. Ce n'est possible que si on tire d'abord la boule numérotée  $n$ , puis la boule  $n - 1$ , etc jusqu'à la boule numérotée 1. Quand il reste uniquement des boules numérotées de 1 à  $i$ , la probabilité de tirer la boule numéro  $i$  est  $\frac{1}{i}$ . La probabilité de  $(X_n = n)$  est alors (c'est une formule des **probabilités composées**)

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$$

- 4 **4.a** Il faut utiliser une boucle **while**. Effectivement, comme l'énoncé l'indique, la composition de l'urne ne dépend que d'une unique variable  $i$  entre 1 et  $n$  : le programme ne « retire » pas vraiment de boules, mais il met simplement à jour  $i$ ... Il faut en plus compter combien d'étapes on réalise, avec une variable compteur qui sera en fait  $X_n$  à la fin.

```
def simule(n):
    # i représente la composition de l'urne
    i = n
    # X est un compteur
    X = 0
    while i > 0:
        # tirer une boule
        t = randint(1, i)
        # mettre à jour l'urne
        i = t - 1
        # compter
        X = X + 1
    return X
```

- 4.b Classique classique une fois que la fonction précédente est écrite, et même sans.

```
def moyenne(n, N):
    c = 0
    for _ in range(N):
        c = c + simule(n)
    return c / N
```

- 4.c C'est une fonction du type « tout compter d'un seul coup » : L se comporte comme  $n + 1$  petits compteurs indépendants, on appelle alors  $k$  le résultat d'une simulation et cette variable nous dit laquelle des cases de L il faut incrémenter. En fait l'expérience ne produit jamais le résultat  $k = 0$ , mais c'est bien pratique de laisser cette possibilité pour bien aligner les indices, sinon L devrait être de longueur  $n$  et  $L[k]$  compterait le nombre de résultats égaux à  $k + 1$ , pour  $0 \leq k \leq n - 1$ .

```
def simule_loi(n, N,):
    L = [0] * (n+1)
    for _ in range(N):
        k = simule(n)
        L[k] += 1
    return L
```

**5 5.a**  $(Y_n = i)_{1 \leq i \leq n}$  est le **système complet d'évènements** associé aux valeurs de  $Y_n$ . C'est une **loi uniforme** sur l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**5.b** On applique alors la **formule des probabilités totales** pour l'évènement  $(X_n = k)$  par rapport au système complet d'évènements des valeurs de  $Y_n$  ci-dessus :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_n = i) \mathbb{P}_{(Y_n=i)}(X_n = k)$$

puis on réfléchit à ce que cela signifie...

Devant, le terme  $\mathbb{P}(Y_n = i)$  est toujours égal à  $\frac{1}{n}$ .

Le terme  $\mathbb{P}_{(Y_n=i)}(X_n = k)$  est la probabilité que l'expérience s'arrête après  $k$  étapes sachant qu'on a tiré la boule numérotée  $i$  à la première étape. Ce terme est nul si  $i = 1$  car alors l'expérience s'arrête à l'étape 1 et ici  $k \geq 2$ . On se rapproche donc déjà de la formule demandée :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=2}^n \frac{1}{n} \mathbb{P}_{(Y_n=i)}(X_n = k)$$

Enfin, si au début on tire  $i$ , alors ensuite tout se passe comme si on tirait dans une urne numérotée de 1 à  $i - 1$  ; pour que l'expérience totale s'arrête en  $k$  étapes, il faut vider cette dernière en  $k - 1$  étapes. Le terme  $\mathbb{P}_{(Y_n=i)}(X_n = k)$  est donc bien égal si  $i \geq 2$  à  $\mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$  et on trouve bien la formule demandée :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$

**5.c** *Question assez formelle, il n'y a rien à comprendre, mais il s'agit de manipuler les méthodes de sommes.* Par définition :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)$$

Remplaçant avec la formule précédente, qu'on a établie seulement pour  $k \geq 2$  :

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + \sum_{k=2}^n \left( \frac{k}{n} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1) \right)$$

Le terme  $\frac{1}{n}$  peut sortir de la somme et on peut intervertir d'une façon ou d'une autre :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$

On veut alors faire apparaître des espérances de  $X_i$ , par définition égale à

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_{k=1}^i k \mathbb{P}(X_i = k)$$

On a alors besoin de faire deux décalages d'indice, à la fois sur  $i$  et sur  $k$  (ici, on les renomme directement) :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \mathbb{P}(X_i = k)$$

Remarquons qu'en fait  $k$  va seulement de 1 à  $i$ ... Il suffit alors de séparer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^i (k+1) \mathbb{P}(X_i = k) = \underbrace{\sum_{k=1}^i k \mathbb{P}(X_i = k)}_{\mathbb{E}(X_i)} + \underbrace{\sum_{k=1}^i \mathbb{P}(X_i = k)}_{=1}$$

Il n'y a plus qu'à remplacer :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbb{E}(X_i) - 1) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$$

et c'est la formule demandée.

**5.d** On peut par exemple partir de

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 1 + \frac{1}{n+1} \left( \mathbb{E}(X_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) \right)$$

en comparant avec la formule précédente d'où on extrait

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_n) - n$$

Cela donne

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{1}{n+1} \left( (n+1)\mathbb{E}(X_n) - n \right)$$

d'où on tire bien la formule demandée  $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$ .

**5.e** Cela signifie typiquement

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \mathbb{E}(X_{n-1}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \mathbb{E}(X_{n-2}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \mathbb{E}(X_{n-3}) = \dots$$

Sachant  $\mathbb{E}(X_1) = 1$  ( $X_1$  est une loi certaine valant 1) alors

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

**5.f** Classique classique. On fixe  $k \geq 2$ . D'une part si  $k-1 \leq t \leq k$  alors  $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$  d'où en intégrant sur  $[k-1, k]$

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

D'autre part si  $k \leq t \leq k+1$  alors  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  d'où en intégrant sur  $[k, k+1]$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

**5.g** Sommons les inégalités précédentes pour  $k$  de 2 à  $n$ , on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

Calculant avec une primitive :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n)$$

Autrement dit on a l'encadrement

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \mathbb{E}(X_n) \leq 1 + \ln(n)$$

Divisant par  $\ln(n)$  puis appliquant le théorème des gendarmes, on trouve

$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

## Exercice

**1**  $E$  : on reconnaît un sous-espace vectoriel paramétré, c'est-à-dire engendré par 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^4$

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

C'est donc  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

$F$  : on reconnaît une intersection de trois hyperplans de  $\mathbb{R}^4$ , donnés par les équations  $x + y - 2z + t = 0$ ,  $2y - 3z + 2t = 0$ , et  $3x - y - t = 0$ . C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

On peut aussi vérifier point par point la définition de sous-espace vectoriel. C'est long et ne rapporte pas plus de points à la question : nous avons utilisé ici des théorèmes du cours !

- 2** Nous avons par définition déjà une famille génératrice  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de  $E$ . La question est : est-elle libre, ou bien faut-il en extraire une base ? La condition que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit libre nécessite d'étudier l'équation  $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}_4$  soit

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b - c = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La famille n'est pas libre, mais  $(\vec{u}, \vec{v})$  l'est (poser  $c = 0$ ) et  $\vec{w}$  est combinaison linéaire de  $(\vec{u}, \vec{v})$  (poser  $c = 1$ ) donc le retirer ne change pas le sous-espace vectoriel engendré.

En résumé on pose  $\vec{u}_1 = \vec{u} = (1, 2, 2, 1)$  et  $\vec{u}_2 = \vec{v} = (2, 2, 1, 1)$ , alors  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  forme une base de  $E$ .

- 2.a** On a besoin d'appliquer le pivot de Gauss sur les équations de  $F$  pour déterminer des vecteurs dedans : pour  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , alors la condition  $(x, y, z, t) \in F$  est équivalente à

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2y - 3z + 2t = 0 \\ 3x - y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2y - 3z + 2t = 0 \\ -4y + 6z - 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2y - 3z + 2t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On prend alors  $z = a$  et  $t = b$  pour variables libres (il n'y a pas un choix meilleur que les autres !) et on trouve  $y = \frac{3}{2}a - b$  puis  $x = \frac{1}{2}a$ . Autrement dit on a écrit

$$(x, y, z, t) \in F \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs ci-dessus sont générateurs de  $F$ , et ils sont automatiquement libres car quand  $(x, y, z, t)$  en est combinaison linéaire, le coefficient  $a$  est nécessairement égal à  $z$  et  $b$  est égal à  $t$  (donc  $(a, b)$  est unique). C'est donc une base de  $F$ .

Pour simplifier les calculs à venir il serait tout de même plus approprié de multiplier par 2 le premier vecteur afin d'éliminer les fractions. Cela revient à choisir de poser  $z = 2a'$  avec  $a' \in \mathbb{R}$ . On choisit donc  $\vec{v}_3 = (1, 3, 2, 0)$  et  $\vec{v}_4 = (0, -1, 0, 1)$ .

- 3 3.a** Attention à bien regarder les questions suivantes avant de se lancer dans des calculs... On peut répondre à toute uniquement à partir de la matrice donc nous allons utiliser celle-ci.

On forme la matrice

$$\text{Mat}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est bien une matrice de rang 3 et c'est donc le rang de la famille de vecteurs.

- 3.b** La famille n'est pas libre car son rang devrait être égal au nombre de vecteurs qui est 4. Elle n'est pas non plus génératrice de  $\mathbb{R}^4$  car son rang devrait être égal à la dimension de  $\mathbb{R}^4$  qui est 4.

De façon concrète : la matrice représente un système linéaire qui aurait au moins une variable libre (permettant d'exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres) et une condition de compatibilité (le sous-espace engendré ne serait pas tout  $\mathbb{R}^4$  mais seulement les vecteurs qui vérifieraient cette condition).

- 3.c** La matrice montre que la famille  $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3)$  est une base de  $G$  : elle est libre (éliminer la quatrième colonne de la matrice) et  $\vec{v}_4$  est combinaison linéaire de ceux-là donc le retirer ne change pas le sous-espace vectoriel engendré.

- 4** Encore une fois, regarder plusieurs questions d'un coup pour éviter d'échelonner deux fois de suite la même chose.

- 4.a** Traitons les deux questions d'un coup. Soit un vecteur quelconque  $\vec{u} = (x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$ . La condition que  $\vec{u}$  soit combinaison linéaire de  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  est équivalente à l'existence de  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\vec{u} = \alpha\vec{g}_1 + \beta\vec{g}_2 + \gamma\vec{g}_3$  c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ -\beta + \gamma = y \\ -\alpha + \gamma = z \\ \beta + \gamma = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ -\beta + \gamma = y \\ 2\gamma = x + z \\ \beta + \gamma = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ -\beta + \gamma = y \\ 2\gamma = x + z \\ 2\gamma = y + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ -\beta + \gamma = y \\ 2\gamma = x + z \\ 0 = -x + y - z + t \end{cases}$$

Prenant maintenant  $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$  on déduit  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$  donc la famille est libre.

- 4.b** Ci-dessus, le vecteur  $\vec{u} = (x, y, z, t)$  est dans  $\text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  si et seulement si ses coordonnées vérifient  $-x + y - z + t = 0$ . C'est bien une présentation de  $\text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  par une seule équation.

- 4.c** Plusieurs stratégies possibles, mais le plus simple est :

- On démontre  $G \subset \text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ . Pour cela il suffit de vérifier que chacun des vecteurs  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3)$  (la base de  $G$  qu'on a extraite) vérifie l'équation de  $\text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  ci-dessus. C'est assez rapide.
- La dimension de  $G$  est égale à 3 car c'est le Vect d'une famille de vecteurs de rang 3.
- La dimension de  $\text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  est aussi égale à 3 car ces trois vecteurs forment une famille libre, donc une base de leur Vect.
- L'inclusion des sous-espaces vectoriels ayant même dimension est alors automatiquement une égalité.

- 5** Encore une fois bien regarder la question : on n'aura pas besoin d'écrire des vecteurs dans une base donc on peut se contenter d'échelonner une matrice.

On pose la matrice

$$\text{Mat}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est bien une matrice de rang 4 (invertible) donc la famille  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{e}_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

Variante encore plus rapide : la famille  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  est déjà libre et on vérifie grâce à la question **5.b** que  $\vec{e}_4 \notin \text{Vect}(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  (il ne vérifie pas l'équation cartésienne). Cela signifie que  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{e}_4)$  est encore libre. Mais pour des raisons de dimensions, c'est automatiquement une base de  $\mathbb{R}^4$ .

### Problème 3

1 1.a D'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$$

et les limites qui ne sont pas des formes indéterminées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

d'où le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$c$	$+\infty$
$f'(x)$	+		
$f(x)$			

Ainsi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante et donc par le **théorème de la bijection** elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f(x) = 0$  admet donc une unique solution  $c$  sur  $\mathbb{R}$ , et c'est équivalent à dire que  $c$  est solution de  $(E)$ .

1.b On calcule  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$ . On a besoin de savoir  $e \approx 2,7$  (savoir  $e > 1$  suffit...) pour conclure que  $f(1) > 0$ . Donc d'après le tableau de variations le  $c$  est dans  $]0, 1[$ .

1.c Fonction de dichotomie classique pour la fonction  $f$  (avoir un dessin sous les yeux). On utilise des variables  $a$  et  $b$  qui représentent des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait l'encadrement  $a_n \leq c \leq b_n$  : il n'y a pas besoin de valeurs absolues sur  $b - a$  ! Un piège vraiment très vicieux : à cause de la consigne, la fonction exponentielle s'appelle **exponentielle(x)** dans ce programme.

```
def solution(epsilon):
    a = 0
    b = 1
    # continuer *tant que* l'écart est plus grand que epsilon
    while b - a >= epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if m - exponentielle(-m) > 0:
            # chercher la solution entre a et m
            b = m
        else:
            # chercher la solution entre m et b
            a = m
    return (a, b)
```

2 2.a On calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -\frac{(x - e^{-x})e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

Ceci est du signe opposé à la fonction  $f$  précédente.

$x$	0	$c$	1
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

**2.b** On démontre par récurrence.

Pour  $n = 0$  c'est vrai car  $u_0 = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $0 \leq u_n \leq c$ . Sur cet intervalle  $F$  est croissante, donc on déduit  $F(0) \leq F(u_n) \leq F(c)$ . On calcule  $F(0) = \frac{1}{2}$  et  $F(c) = c$ , donc on a encore bien  $0 \leq F(u_n) \leq c$  avec  $F(u_n) = u_{n+1}$ .

**2.c** Pour  $x$  dans l'intervalle  $[0, c]$  alors

$$F(x) - x = -\frac{f(x)}{1 + e^{-x}} \geq 0 \quad \text{car} \quad f(x) \leq 0$$

On en déduit donc  $F(u_n) \geq u_n$  soit  $u_{n+1} \geq u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Par le **théorème de convergence monotone**, elle converge alors vers une limite  $\ell \leq c$ . Par passage à la limite,  $\ell$  vérifie  $F(\ell) = \ell$ , mais cela revient à  $f(\ell) = 0$ , donc  $\ell = c$ .

**3 3.a** La fonction  $f$  étant croissante sur  $[0, c]$ , on déduit  $f(x) \geq f(0) = -1$  pour  $x \in [0, c]$ . De plus  $e^{-x} \leq 1$ . On a alors  $-f(x)e^{-x} \leq 1$ . D'autre part  $1 + e^{-x} \geq 1 + e^{-c}$ , donc passant à l'inverse et au carré :

$$\frac{1}{(1 + e^{-x})^2} \leq \frac{1}{(1 + e^{-c})^2} = A$$

Multipliant les deux inégalités obtenues, on a bien  $F'(x) \leq A$  pour tout  $x \in [0, c]$ .

**3.b** On applique le **théorème des accroissements finis**. On fixe  $x \in [0, c[$ . La fonction  $F$  est bien continue et dérivable sur tout  $\mathbb{R}$ , il existe donc un élément  $d_x$  dans  $]x, c[$  tel que

$$\frac{F(c) - F(x)}{c - x} = F'(d_x)$$

mais d'autre part  $F'(d_x) \leq A$ .

**3.c** On démontre le résultat par récurrence.

Pour  $n = 0$  : c'est  $0 \leq c \leq c$ , c'est bien vrai.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $0 \leq c - u_n \leq A^n c$ . Par l'inégalité précédente, alors (on peut bien multiplier par  $c - x \geq 0$ )

$$0 \leq F(c) - F(u_n) \leq (c - u_n)A$$

Sachant  $F(c) = c$  et  $F(u_n) = u_{n+1}$  cela donne en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$0 \leq c - u_{n+1} \leq A^n c \times A$$

et ce dernier terme est  $A^{n+1}c$ .

Enfin, sachant  $A < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ . Par le **théorème des gendarmes** on retrouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$ .

**3.d** Il s'agit de la **méthode de Newton**. En un point  $u_n$  de  $[0, c]$ , la tangente à la courbe de  $f$  a pour équation  $y = f'(u_n)(x - u_n) + u_n$ . Celle-ci coupe l'axe des abscisses lorsque  $y = 0$  soit

$$x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Mais c'est la relation de récurrence  $u_{n+1} = F(u_n)$  que nous avons étudié.