DS 7 Mathématiques

Problème 1

1. (a) *Classique, fait en cours.*
On pose $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$, pour $x \in]-1, +\infty[$. Alors f est dérivable et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \tag{1}$$

Le tableau de variations est alors

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(2)

On déduit donc $\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ f(x) \geqslant 0}$ ce qui est bien équivalent à l'inégalité demandée.

(b) D'abord par les propriétés du logarithme

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \tag{3}$$

Par $\boxed{\text{téléscopage}}$ ceci donne $T_n = \ln(n+1) - \ln(1)$ d'où $\boxed{T_n = \ln(n+1)}$. On déduit alors directement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$.

(c) Par la question précédente appliquée en $x = \frac{1}{k}$:

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \tag{4}$$

Sommant ces inégalités on obtient directement $\boxed{T_n \leqslant S_n}$. Par le théorème du $\boxed{\text{gros gendarme}}$ on déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

2. (a) Soit $n \geqslant 1$. Alors par définition

$$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \tag{5}$$

Il suffit alors d'écrire ce dernier terme

$$\ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \tag{6}$$

et on obtient l'inégalité demandée.

(b) Encore une fois par la toute première inégalité :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1} \tag{7}$$

d'où on déduit directement $\boxed{v_{n+1} - v_n \leqslant 0}$, ceci pour tout $n \geqslant 1$. Ceci démontre que la suite $(v_n)_{n\geqslant1}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$.

(c) Il suffit de remarquer que dans la question précédente

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{8}$$

On démontre alors rapidement par récurrence la propriété : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \geqslant \frac{1}{n}$.

- C'est vrai pour $n=1$ car $v_1 = 1-\ln(1)=1$.
- Si c'est vrai pour $n \geqslant 1$ alors toujours par la même inégalité on obtient

$$-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant -\frac{1}{n} \tag{9}$$

et donc en sommant

$$v_{n+1} \geqslant v_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \tag{10}$$

donc avec l'hypothèse de récurrence $v_n \geqslant \frac{1}{n}$ on déduit directement $\boxed{v_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}}$.

En conclusion on a bien $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ v_n \geqslant \frac{1}{n}}$.

(d) La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 car $\frac{1}{n} \geqslant 0$.
Attention car le minorant ne doit pas dépendre de n ! En fait, on ne peut pas démontrer directement $v_n \geqslant 0$ *mais on est obligé de passer par la propriété* $v_n \geqslant \frac{1}{n}$ *par récurrence.*

D'après le $\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$, elle converge (vers une limite $\gamma \geqslant 0$).

(e) On a alors démontré

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(S_n - \ln(n)\Big) = \gamma \tag{11}$$

En divisant on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right) = 0 \tag{12}$$

ce qui est le même chose que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln(n)} = 1 \iff \boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)} \tag{13}$$

3. (a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs dans A_{2n} en posant d'un côté $k=2j+1$ et de l'autre $k=2j$, on obtient

$$A_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1} + \sum_{j=1}^{n}\frac{-1}{2j} \tag{14}$$

Mais alors on reconnait

$$A_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \boxed{\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2}S_n = A_n} \tag{15}$$

(b) Séparons exactement de la même façon la somme S_{2n} :

$$S_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2}S_n \tag{16}$$

En comparant les deux formules précédentes, en éliminant la somme $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2j+1}$, on trouve alors

$$A_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}S_n = \boxed{S_{2n} - S_n = A_{2n}} \tag{17}$$

(c) Remarquant que $\ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$, on peut par exemple écrire

$$A_{2n} = \Big(S_{2n} - \ln(2n)\Big) - \Big(S_n - \ln(n)\Big) + \ln(2) \tag{18}$$

Les deux termes sous la parenthèse ont la même limite γ. On déduit alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \ln(2)} \tag{19}$$

Il est aussi naturel de rédiger cela en écrivant $S_n = \ln(n) + \gamma + h_n$ où le terme $h_n = v_n - \gamma$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$.
Comme $A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ alors la suite des $(A_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ converge aussi vers la même limite $\ln(2)$, et donc comme ce sont les deux suites extraites des rangs pairs et impairs de A_n, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \ln(2)} \tag{20}$$

Problème 2

1. On calcule pas à pas

$$\boxed{P_1(x) = 2}, \qquad \boxed{P_2(x) = -6x^2 + 4}, \qquad \boxed{P_3(x) = 24x^4 - 36x^2 + 8} \tag{21}$$

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = P_n(x)$ ».
   (a) Pour $n = 0$ c'est vrai car P est constant.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors en remplaçant par $-x$ dans la relation de récurrence qui définit P_{n+1}, le terme x^2 est pair donc dans la moitié de gauche on obtient $(2 - 3nx^2)P_n(-x)$ qui donne bien $(2 - 3nx^2)P_n(x)$ par l'hypothèse de récurrence. Mais à droite… en fait la dérivée de la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(-x) = P_n(x) \tag{22}$$

   donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -P_n'(-x) = P_n'(x) \tag{23}$$

   autrement dit $\boxed{P_n'(-x) = -P_n'(x)}$. On obtient alors

$$P_{n+1}(-x) = (2 - 3n(-x)^2)P_n(x) + (-x)^3 \times (-P_n'(x)) \tag{24}$$

   et on retombe bien sur $\boxed{(2 - 3nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x) = P_{n+1}(x)}$.

3. Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\deg(P_n) \leqslant 2(n-1)$:
   - Pour $n = 1$: $P_1 = 2$ est bien de degré 0 (polynôme constant non-nul).
   - Pour $n \geqslant 1$, supposons $\deg(P_n) \leqslant 2(n-1)$. Dans la relation de récurrence définissant P_{n+1} alors :
     - Dans la moitié gauche, $\deg(2 - 3nx^2) = 2$ (le coefficient devant x^2 est non-nul pour $n \geqslant 1$). Par produit le terme $(2 - 3nx^2)P_n(x)$ sera donc de degré 2 de plus, donc au plus $2(n-1) + 2 = 2n$.
     - Dans la moitié de droite, le terme $P_n'(x)$ diminue le degré de 1 (sauf si P est constant), donc dans tous les cas est de degré inférieur à $2(n-1) - 1$. On multiplie par x^3 qui fait monter le degré de 3, donc le degré de $x^3 P_n'(x)$ sera inférieur à $2(n-1) - 1 + 3 = 2n$.

     On effectue alors une somme de deux polynômes dont les degrés sont possiblement les mêmes, donc on ne peut pas conclure aisément une égalité sur le degré de la somme, mais on déduit tout de même une inégalité $\boxed{\deg(P_{n+1}) \leqslant 2n}$.

   Par récurrence on a bien $\deg(P_n) \leqslant 2(n-1)$, valable pour tout $n \geqslant 1$.

4. On note α_n le coefficient dominant de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors P est $\boxed{\text{de degré } n \text{ si } a_n \neq 0}$, et dans ce cas a_n est appelé le $\boxed{\text{coefficient dominant de } P}$.
Autre formulation : pour un tel P, le degré est

$$\boxed{\operatorname{Max}\left\{0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; a_k \neq 0\right\}} \tag{25}$$

et le coefficient dominant est alors $a_{\deg(P)}$.

(b) *À la question précédente, on ne peut pas conlure facilement sur le degré de la somme car les coefficients dominants des deux morceaux peuvent s'annuler. On doit donc raisonner plus précisément en analysant les coefficients dominants en même temps que les degrés.*
Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que P_n est de degré exactement $2(n-1)$ et possède un coefficient dominant α_n non-nul. Cela signifie qu'on peut écrire $P_n = \alpha_n x^{2(n-1)} + \cdots$ (des termes de plus bas degré).

- Pour $n = 1$: encore une fois, c'est déjà vu, avec $\alpha_1 = 2$.
- Pour $n \geqslant 1$, supposons qu'on peut écrire $P_n = \alpha_n x^{2(n-1)} + \cdots$ avec $\alpha_n \neq 0$. Alors dans la relation définissant P_{n+1} :

$$P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)\left(\alpha_n x^{2(n-1)} + \cdots\right) + x^3\left(2(n-1)\alpha_n x^{2(n-1)-1} + \cdots\right) \tag{26}$$

Ne gardant que les termes de plus haut degré :

$$P_{n+1}(x) = (-3n\alpha_n x^{2n} + \cdots) + (2(n-1)\alpha_n x^{2n} + \cdots) = -(n+2)\alpha_n x^{2n} + \cdots \tag{27}$$

Or si $\alpha_n \neq 0$ alors on a encore $-(n+2)\alpha_n \neq 0$. Ceci démontre à la fois que $\boxed{\deg(P_{n+1}) = 2n}$ et que la suite des coefficients dominants vérifie la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_{n+1} = -(n+2)\alpha_n} \tag{28}$$

Par récurrence on a bien $\deg(P_n) = 2(n-1)$, pour tout $n \geqslant 1$.
Remarque : cette relation n'est pas vraie pour $n = 0$.

(c) On vérifie cette formule par récurrence (encore ! mais c'est très rapide) à partir de la relation ci-dessus :

- Pour $n = 1$: cela donne $\alpha_n = 1 \times 2! = 2$ ce qui est bien la bonne valeur de α_1.
- Pour $n \geqslant 1$, supposons $\alpha_n = (-1)^{n+1}(n+1)!$. Alors

$$\alpha_{n+1} = -(n+2) \times (-1)^{n+1}(n+1)! = (-1)^{n+2} \times (n+2)(n+1)! = (-1)^{n+2}(n+2)! \tag{29}$$

et c'est donc bien vrai pour α_{n+1}.

En conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \alpha_n = (-1)^{n+1}(n+1)!}$.

5. Posant $x = 0$ dans la relation de récurrence définissant la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve directement

$$P_{n+1}(0) = 2P_n(0) \tag{30}$$

Autrement dit la suite des $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{géométrique de raison 2}}$. Comme $P_0 = 1$ alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 2^n} \tag{31}$$

Remarque : sachant calculer formellement avec des polynômes à partir de leur liste de coefficients, il est naturel de vouloir écrire une programme Python qui calcule P_n, en effet toutes les étapes sont maintenant automatiques. Voir la correction du TD sur les polynômes, ainsi que les programmes Python joins au corrigé de ce DS.

6. Un certain nombre de points subtils si les longueurs des listes ne sont pas les mêmes, et plusieurs façons d'écrire sa fonction. Au moins il est plus élégant de commencer par créer une nouvelle liste de zéros, pour que la fonction ne modifie pas les polynômes `P` et `Q` donnés en argument (cela peut être problématique).

```python
def somme(P, Q):
    n = len(P) - 1
    m = len(Q) - 1
    if n >= m:
        # le résultat est de degré n
        R = [0 for _ in range(n+1)]
        # somme là où P, Q ont des coefficients communs
        for i in range(m+1):
            R[i] = P[i] + Q[i]
        # puis rajouter les coefficients de P tout seul
        for i in range(m+1, n+1):
            R[i] = P[i]
        return R
    else:
        # Sinon, on peut tout refaire en échangeant P et Q.
        # Ou alors grosse astuce (réservée aux professionnels) :
        return somme(Q, P)
```

7. En quelque sorte plus facile : avec une double boucle, les coefficients `P[i]` et `Q[j]` se multiplient entre eux et « contribuent au » coefficient de `R` en degré `i+j`.

```python
def produit(P, Q):
    n = len(P) - 1
    m = len(Q) - 1
    # le résultat de la bonne taille
    r = n + m
    R = [0 for _ in range(r+1)]
    # double boucle pour remplir R
    for i in range(n+1):
        for j in range(m+1):
            R[i+j] = R[i+j] + P[i] * Q[j]
    return R
```

8. Relativement plus facile, comparer avec le cours.

```python
def dérive(P):
    n = len(P) - 1
    # le résultat est de degré n-1
    r = n - 1
    R = [0 for _ in range(r+1)]
    for i in range(r+1):
        R[i] = (i+1) * P[i+1]
    return R
```

9. On a tout, c'est maintenant comme pour le calul de termes d'une suite. Il faut introduire les polynômes $2-3nx^2$ et x^3, sous forme de liste.

```python
def P(n):
    Q = [1]
    for i in range(n):
        Q = somme(produit([2, 0, -3*i], Q), produit([0, 0, 0, 1], dérive(Q)))
    return Q
```

On peut tout aussi bien faire une fonction récursive.

10. Écrivant $-1/x^2 = -x^{-2}$, dont la dérivée est $-(-2x^{-3}) = 2/x^3$, on calcule (évidemment $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}} \tag{32}$$

Dérivant comme un produit, encore en écrivant $1/x^3 = x^{-3}$ dont la dérivée est $-3x^{-4} = -3/x^4$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \tag{33}$$

La fraction se regroupe au même dénominateur x^6 (en prévision des questions suivantes) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f''(x) = \frac{-6x^2 + 4}{x^6}e^{-1/x^2}} \tag{34}$$

11. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : « \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2} » \tag{35}$$

- Pour $n = 0$: c'est $f^0 = f$ qui est bien égal à $1/x^0 e^{-1/x^2}$, et $P_0 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- (remarque : pour $n = 1$ c'est bien vrai aussi car $P_1 = 2$, et pour $n = 2$ c'est vrai aussi car $P_2(x) = -6x^2 + 4$)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Il s'agit de dériver une fois la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} \tag{36}$$

et de « mettre au même dénominateur » c'est-à-dire l'exprimer en fonction de $x^{-3(n+1)}$.
En dérivant alors le produit, par exemple sous forme $(P_n(x)x^{-3n}) \times e^{-1/x^2}$, alors pour tout $x \neq 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(P_n'(x)x^{-3n} + P_n(x) \times (-3nx^{-3n-1})\Big)e^{-1/x^2} + P_n(x)x^{-3n} \times 2x^{-3}e^{-1/x^2} \tag{37}$$

Cela s'écrit aussi :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)}{x^{3n}} - \frac{3nP_n(x)}{x^{3n+1}} + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}}\right)e^{-1/x^2} \tag{38}$$

Il ne reste plus qu'à mettre au même dénominateur :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2} \tag{39}$$

Regroupant, alors

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(2 - 3nx^2)P_n(x) + x^3P_n'(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2} \tag{40}$$

On reconnait bien le polynôme P_{n+1} : donc

$$\boxed{f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}} \tag{41}$$

Ceci démontre $\mathcal{P}(n + 1)$.

Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

12. Pour $x \to 0$, alors le terme $-1/x^2$ tend vers $-\infty$ donc son exponentielle tend vers 0. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0. Le polynôme devant $P_n(x)$ tend vers une valeur finie $P_n(0)$ (qu'on sait égale à 2^n, mais cela n'aura pas d'importance) donc il faut savoir qui domine entre le e^{-1/x^2} qui tend vers 0 et le $1/x^{3n}$ qui tend vers $+\infty$. Cela est plus clair en posant $t = 1/x^2$, qui tend alors vers $+\infty$, et donc $x = t^{-1/2}$. Alors $1/x^{3n}$ est égal à $t^{3n/2}$, autrement dit on étudie

$$\lim_{t \to +\infty} P_n(t^{-1/2}) \times \frac{t^{3n/2}}{e^t} \tag{42}$$

Sous cette forme, le terme $P_n(t^{-1/2})$ tend toujours vers la valeur finie $P_n(0)$ et le terme de droite tend vers 0 à cause de la comparaison entre exponentielle et polynômes. Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0} \tag{43}$$

Remarque : en calculant à la main les premières dérivées de f, on ne trouve pas de formule simple donnant directement $f^{(n)}$, mais on peut au moins en conjecturer une certaine forme, un polynôme P_n divisé par x^{3n} et multiplié par e^{-1/x^2}. L'étude de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'obtenir diverses informations intéressantes sur les dérivées de f, même sans les connaitre entièrement. Si les polyômes n'étaient pas donnés, alors dans la dernière question on redécouvrirait leur relation de récurrence : on démontrerait par récurrence qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}$, et dans l'hérédité on serait amené à définir P_{n+1} en fonction de P_n.

Problème 3

1. Les trois évènements constituants B_3 sont indépendants (ce sont trois lancers différents), chacun ayant probabilité $\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{u_3 = \frac{1}{8}}$. C'est aussi $\mathbb{P}(B_n)$ pour tout n, pour la même raison.
2. (a) Résumons soigneusement :
   - B_k signifie obtenir Pile au $(k-2)$-ième lancer, Pile au $(k-1)$-ième, et Face au k-ième.
   - B_{k+1} signifie obtenir Pile au $(k-1)$-ième lancer, Pile au k-ième, et Face au $(k+1)$-ième. Donc B_{k+1} est incompatible avec B_k à cause du k-ième lancer.
   - B_{k+2} signifie obtenir Pile au k-ième lancer, Pile au $(k+1)$-ième, et Face au $(k+2)$-ième. Donc B_{k+2} est incompatible avec B_k à cause du k-ième lancer, et avec B_{k+1} à cause du $(k+1)$-ième.

   Donc $\boxed{\text{les évènements } B_k,\ B_{k+1} \text{ et } B_{k+2} \text{ sont deux à deux incompatibles}}$.

   (b) Par définition $U_4 = B_3 \cup B_4$ qui sont incompatibles. Donc

   $$u_4 = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{4} = u_4} \tag{44}$$

   De même $U_5 = B_3 \cup B_4 \cup B_5$ qui sont deux à deux incompatibles, donc

   $$u_5 = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8} = u_5} \tag{45}$$

3. (a) On peut développer et distribuer :

   $$U_{n+2} \cap B_{n+3} = (U_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2}) \cap B_{n+3} = (U_n \cap B_{n+3}) \cup (B_{n+1} \cap B_{n+3}) \cup (B_{n+2} \cap B_{n+3}) \tag{46}$$

   Par incompatibilité, les deux dernières intersection sont vides, donc $\boxed{\mathbb{P}(U_{n+2} \cap B_{n+3}) = \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+3})}$.

   Puis les évènements U_n et B_{n+3} sont $\boxed{\text{indépendants}}$ car U_n porte sur les n premiers lancers alors que B_{n+3} porte sur les lancers $n+1$, $n+2$, $n+3$. D'où

   $$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+3}) = \mathbb{P}(U_n) \times \mathbb{P}(B_{n+3}) = \boxed{\frac{1}{8}u_n = \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+3})} \tag{47}$$

   (b) Soit $n \geqslant 3$. Par définition :

   $$U_{n+3} = U_{n+2} \cup B_{n+3} \tag{48}$$

   Ces évènements ne sont pas incompatibles ! On a alors

   $$\mathbb{P}(U_{n+3}) = \mathbb{P}(U_{n+2} \cup B_{n+3}) = \mathbb{P}(U_{n+2}) + \mathbb{P}(B_{n+3}) - \mathbb{P}(U_{n+2} \cap B_{n+3}) \tag{49}$$

   Par les questions précédentes, cela donne directement :

   $$\boxed{u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n} \tag{50}$$

   C'est la relation qu'on voulait.

4. (a) D'après la relation précédente

   $$u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{8}\Big(1 - u_n\Big) \tag{51}$$

   Mais par définition même d'une probabilité, $u_n \in [0, 1]$ donc $u_{n+3} - u_{n+2} \geqslant 0$. Ceci montre que la suite est $\boxed{\text{croissante}}$, du moins à partir de u_{n+2} (donc de u_5 car $n \geqslant 3$). Mais on a déjà calculé à la main $u_3 \leqslant u_4 \leqslant u_5$. Donc la suite est bien croissante à partir de $n = 3$.

   (b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et majorée (par 1 car c'est une probabilité). D'après le $\boxed{\text{théorème de convergence monotone}}$, elle converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.

   Il s'agit alors de passer à la limite dans l'expression $u_{n+3} = u_{n+2} - \frac{1}{8}u_n + \frac{1}{8}$: pour $n \to +\infty$ alors $u_{n+3} \to \ell$ et $u_{n+2} \to \ell$ aussi (il ne s'agit que de décaler la suite) et donc on obtient l'équation

   $$\ell = \ell - \frac{1}{8}\ell + \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \boxed{\ell = 1} \tag{52}$$

(c) Plus on lance la pièce, plus il devient probable de voir apparaitre au moins une fois le motif « Pile, Pile, Face » (et c'est même vrai avec n'importe quel motif fini !). Les probabilistes parlent d'évènement « quasi-certain » : sur un nombre infini de lancers, la probabilité donnée doit être 1 (et le contraire, probabilité 0) même s'il n'est pas impossible d'écrire une issue où on obtiendrait jamais ce motif, par exemple obtenir uniquement des Pile.

5. Classique classique. Ne pas oublier d'importer, au moins une fois, la bibliothèque, car il n'est pas dit dans la question qu'on suppose l'avoir importée ! Ici, on peut soit utiliser `randint(1, 2)`, soit `random()` et comparer la valeur avec `0.5`, les deux fonctions sont données et sont possibles. Ici on fait le choix de n'utiliser que `randint(1, 2)`.

```
from random import randint

def lancer():
    x = randint(1, 2)
    if x == 1:
        return "pile"
    else:
        return "face"
```

Il est fort pratique d'utiliser `return` car le but est de ré-utiliser la fonction dans la question suivante.

6. Le piège est d'effectuer trois lancers dans chaque passage de boucle… En fait, on a besoin d'une fonction qui effectue un seul lancer mais se souvient des deux lancers précédents.

```
def trouvePPF(n):
    # a et b sont les deux lancers précédents
    a = lancer()
    b = lancer()
    # on a déjà fait 2 lancers…
    for k in range(3, n+1):
        c = lancer()
        if a == "pile" and b == "pile" and c == "face":
            return True
        # mettre à jours les lancers précédents
        a = b
        b = c
    return False
```

On peut aussi créer une liste de tous les lancers. Attention car alors dans la boucle il faut comparer le lancer actuel avec les deux précédents, et les deux premiers doivent donc être effectués avant la boucle !

7. Même si la fonction précédente est un petit peu subtile, celle-ci l'est beaucoup moins. Il suffit de compter, sans se mélanger entre n et N.

```
def simule(n, N):
    # compteur
    c = 0
    for _ in range(N):
        t = trouvePPF(n)
        if t == True:
            c = c + 1
    # ou en pourcentage, ce n'est pas vraiment important
    return c / N
```

Des simulations pour $n = 3, 4, 5$ et $N = 1000$ donnent bien des valeurs proches des u_3, u_4 et u_5 calculés.

Exercice

1. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. La condition $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est équivante au système linéaire

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \alpha + 2\beta + \lambda\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \tag{53}$$

On fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \lambda\gamma = 0 \\ 3\beta + (\lambda - 2)\gamma = 0 \\ 3\beta + (-\lambda + 4)\gamma = 0 \end{cases} \tag{54}$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \lambda\gamma = 0 \\ 3\beta + (\lambda - 2)\gamma = 0 \\ (-2\lambda + 6)\gamma = 0 \end{cases} \tag{55}$$

On lit alors :

- Si $\lambda \neq 3$: l'unique solution est $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ donc les vecteurs sont $\boxed{\text{non-coplanaires}}$.
- Si $\lambda = 3$: alors dans L_3, γ est une variable libre. On peut alors résoudre le système avec $\gamma = 1$, on trouve $\beta = -\frac{1}{3}$ puis $\alpha = -\frac{7}{3}$. Les vecteurs sont donc $\boxed{\text{coplanaires}}$ et on a la relation $-\frac{7}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, ce qu'on peut aussi ré-écrire :

$$\boxed{\vec{v} = -7\vec{u} + 3\vec{w}} \tag{56}$$

Attention à la rédaction. Au départ, on ne sait pas que c'est $\vec{w}$ qui es combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc on ne peut pas partir de l'équation $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. On ne sait pas non plus à l'avance si on va montrer que les vecteurs sont coplanaires ou non. Donc la rédaction commence vraiment par « soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, étudions la condition $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ ».

2. Remarquons que quelque soit $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_m$ est bien un plan car au moins un des coefficients de l'équation est non-nul.

   (a) Étudier $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + y + z = -5 \end{cases} \tag{57}$$

On échelonne alors d'un coup avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \tag{58}$$

Alors z est libre, on pose $z = t \in \mathbb{R}$, et on écrit

$$\begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \tag{59}$$

Il s'agit bien d'une $\boxed{\text{droite}}$ passant par le point $(-2, -1, 0)$ et dirigée par le vecteur $(-1, 1, 1)$.

   (b) Il suffit de vérifier que la droite $\mathcal{D}$ ci-dessus est dans tous les $\mathcal{P}_m$ (réciproquement, l'intersection de tous les $\mathcal{P}_m$ est évidemment dans l'intersection de seulemet $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$). Or avec le paramétrage, on remplace dans l'équation : pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$m(-t - 2) + (t - 1) + (m - 1)t + 2m + 1 = 0 \tag{60}$$

Donc $\boxed{\mathcal{P}_m \subset \mathcal{D}}$, pour tout $m \in \mathbb{R}$.

3. (a) Version paramétrée par $t \in \mathbb{R}$: c'est

$$\boxed{\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = \lambda t \end{cases}} \tag{61}$$

L'équation cartésienne s'obtient en égalant t dans les deux équations (condition de compatibilité si t est l'inconnue et x, y sont des paramètres) :

$$\boxed{\lambda x - y = -\lambda} \tag{62}$$

(b) L'équation se ré-écrit

$$\left(x^2 - 4x\right) + \left(y^2 - 2y\right) = \alpha \tag{63}$$

On met sous forme canonique chacun des deux morceaux :

$$\left((x-2)^2 - 4\right) + \left((y-1)^2 - 1\right) = \alpha \tag{64}$$

ce qui est bien équivalent à :

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = \alpha + 5} \tag{65}$$

L'ensemble $\mathcal{C}_\alpha$ est alors :

- Vide si $\alpha < -5$,
- Le point $(2, 1)$ si $\alpha = -5$,
- Un cercle de centre $(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{\alpha + 5}$ si $\alpha > -5$.

(c) *Faire un dessin. On cherche l'intersection entre un cercle et une droite, définie par un point en dehors du cercle et un vecteur directeur. Il y a donc possiblement aucune solution, ou deux, ou exactement une si la droite est tangente au cercle..*

Dans ce cas alors $\mathcal{C}_{-4}$ est un cercle de rayon 1. Le plus simple est de remplacer les équations paramétrées de $\mathcal{D}_\lambda$ dans $\mathcal{C}_{-4}$:

$$(-3 + t)^2 + (\lambda t - 1)^2 = 1 \tag{66}$$

Le but est de trouver, en fonction de λ, le nombre de solutions t. On développe comme une équation d'inconnue λ et de paramètre t :

$$(1 + \lambda^2)t^2 - (6 + 2\lambda)t + 9 = 0 \tag{67}$$

C'est toujours une équation de degré 2, avec $\Delta = (6 + 2\lambda)^2 - 4 \times 9 \times (1 + \lambda^2)$. En développant :

$$\Delta = 4\left(-8\lambda^2 + 6\lambda\right) = \boxed{8\lambda(3 - 4\lambda) = \Delta} \tag{68}$$

Le nombre de points d'intersection dépend donc du signe de Δ :

- Si $\lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$: l'intersection est vide.
- Si $\lambda \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$: il y a exactement deux points d'intersection.
- Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{3}{4}$: il y a un unique point d'intersection.