DS 5 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Il y a en tout 42 cases. Il faut en choisir 10 à colorier en noire. La réponse est $\boxed{\binom{42}{10}}$ car l'ordre du choix des 10 cases n'a pas d'importance.
2. (a) La grille a 4 coins. Si on peut placer les cases noires partout sauf dans les coins, alors il faut choisir 10 cases noires (toujours) parmi seulement $42 - 4 = 38$ possibilités. Le total est donc $\boxed{\binom{38}{10}}$.

   (b) On compte séparément : il y a 0 ou 1 ou 2 cases noires dans les coins.
   - 0 coins : c'est la question précédente, $\binom{38}{10}$ choix.
   - 1 coin : on choisit le coin (4 choix) dans lequel on met une case noire, il reste alors à placer 9 cases noires sur 38 cases : $4 \times \binom{38}{9}$.
   - 2 coins : on choisit deux coins (total : $\binom{4}{2}$ choix) dans lesquels on met une case noire, puis il reste à choisir 8 cases noires parmi 38, total : $\binom{4}{2} \times \binom{38}{8}$.

   On somme car ceci correspond à des situations disjointes. Total :
   $$\boxed{\binom{38}{10} + 4\binom{38}{9} + \binom{4}{2}\binom{38}{8}} \tag{1}$$
   On peut aussi raisonner avec le contraire, qui est : 3 ou 4 cases noires dans les coins. Ce n'est pas beaucoup plus simple : pour des grilles à 3 cases noires dans les coins on trouve $4 \times \binom{38}{7}$ (il suffit de choisir le coin parmi 4 qui n'est pas noir) et il y a $\binom{38}{6}$ grilles à 4 coins noir. Le total est alors
   $$\binom{42}{10} - 4\binom{38}{7} - \binom{38}{6} \tag{2}$$

   (c) Le contraire est : aucune case noire dans la première ligne. Or la première ligne contient 7 cases (la longueur d'une ligne est égale au nombre de colonnes !). Il s'agit donc de choisir 10 cases noires parmi $42 - 7 = 35$ cases restantes, le total est donc $\binom{35}{10}$. Comme c'est un complémentaire, la réponse est :
   $$\boxed{\binom{42}{10} - \binom{35}{10}} \tag{3}$$

   (d) Attention au coin qui est à la fois sur la dernière ligne et sur la première colonne ! Rappelons que la dernière ligne a 7 cases, la première colonne a 6 cases.
   - Si ce coin n'est pas noir, alors on choisit indépendamment une case noire parmi 6 sur la dernière ligne (les lignes ont 7 cases mais on retire ce coin), une case noire parmi 5 sur la première colonne (les colonnes ont 6 cases mais on retire ce coin), et 8 cases restantes parmi $42-7-6+1 = 30 = 6\times 5$ (faire un dessin). Le total est $6 \times 5 \times \binom{30}{8}$.
   - Si ce coin est noir, alors il est déjà choisi et c'est le coin noir à la fois de la première ligne et de la dernière colonne. Il reste à prendre 9 cases parmi les 30 autres. Le total est $\binom{30}{9}$.

   Ces deux situations sont bien disjointes. Conclusion :
   $$\boxed{\binom{30}{9} + 30\binom{30}{8}} \tag{4}$$
3. Il y a $42-10 = 32$ cases à remplir avec des lettres. On considère qu'il y a 26 lettres de l'alphabet (effectivement dans une grille de mots fléchés, on ne tient pas compte des majuscules ni des accents etc, et il n'y a pas d'espaces ou de tiret). Cette fois-ci, chaque case a (indépendamment) 26 lettres possibles. Le total est donc $\boxed{26^{32}}$ (26 choix pour la première cases libre, multiplié par 26 choix pour la seconde, etc, peu importe l'ordre dans lequel on considère les cases libres).

Problème

1. Pour $n = 3$, on trouve :

$$\boxed{\mathcal{C}_3 = \Big\{[3], [2,1], [1,2], [1,1,1]\Big\}} \tag{5}$$

Pour $n = 4$, on trouve :

$$\boxed{\mathcal{C}_4 = \Big\{[4], [3,1], [1,3], [2,2], [2,1,1], [1,2,1], [1,1,2], [1,1,1,1]\Big\}} \tag{6}$$

2. On trouve pour $n = 5$:
   - Longueur 1 : $[5]$,
   - Longueur 2 : $[4,1]$, $[1,4]$, $[3,2]$, $[2,3]$,
   - Longueur 3 : $[3,1,1]$, $[1,3,1]$, $[1,1,3]$, $[2,2,1]$, $[2,1,2]$, $[1,2,2]$,
   - Longueur 4 : $[2,1,1,1]$, $[1,2,1,1]$, $[1,1,2,1]$, $[1,1,1,2]$,
   - Longueur 5 : $[1,1,1,1,1]$.
3. **(Informatique)** Classique classique classique.

```python
def somme(C):
    S = 0
    for i in range(len(C)):
        S = S + C[i]
    return S
```

4. (a) Une composition $C \in \mathcal{C}_n$ est non-vide, elle démarre par un élément $c_1 > 0$. Si $c_1 = 1$, elle est dans $\mathcal{A}_n$. Si $c_1 > 1$, elle est dans $\mathcal{B}_n$. Bien sûr, on ne peut pas avoir les deux cas à la fois : $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ forment une $\boxed{\text{partition de } \mathcal{C}_n}$, autrement dit

$$\boxed{\mathcal{C}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}_n = \emptyset} \tag{7}$$

   (b) Cela découle du théorème de cours sur l'$\boxed{\text{union de deux ensembles disjoints}}$:

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{A}_n) + \mathrm{Card}(\mathcal{B}_n)} \tag{8}$$

5. (a) D'abord Φ est bien définie. Sachant $n \geqslant 2$ et $c_1 = 1$ alors la composition n'est pas de longueur 1, donc $\Phi(C)$ est bien non-vide. Si on a $1 + c_2 + \cdots + c_\ell = n$ alors $c_2 + \cdots + c_\ell = n - 1$ donc Φ arrive bien dans $\mathcal{C}_{n-1}$. Enfin, la bijection réciproque consiste à « remettre le 1 » : c'est l'application (attention à la numérotation)

$$\Phi^{-1} : D = [d_1, d_2, \dots, d_{\ell-1}] \longmapsto [1, d_1, d_2, \dots, d_{\ell-1}]$$

Il est clair que $\Phi^{-1}(\Phi(C)) = C$ pour tout $C \in \mathcal{A}_n$ et $\Phi(\Phi^{-1}(D)) = D$ pour tout $D \in \mathcal{C}_{n-1}$. En conclusion $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$ et Φ^{-1} est définie ci-dessus.

   (b) De même : on sait $n \geqslant 2$ et $c_1 > 1$, donc $\Psi(C)$ est non-vide et ne démarre pas par 0, c'est bien une composition. Sachant $c_1 + c_2 + \cdots + c_\ell = n$ alors $(c_1 - 1) + c_2 + \cdots + c_\ell = n - 1$: $\Psi(C)$ est bien un élément de $\mathcal{C}_{n-1}$. La bijection réciproque consiste à « ajouter 1 au premier élément » : c'est

$$\Psi^{-1} : D = [d_1, d_2, \dots, d_\ell] \longmapsto [d_1 + 1, d_2, \dots, d_\ell]$$

Encore une fois on a $\Psi^{-1}(\Psi(C)) = C$ pour tout $C \in \mathcal{B}_n$ et $\Psi(\Psi^{-1})(D) = D$ pour tout $D \in \mathcal{C}_{n-1}$. Donc $\boxed{\Psi \text{ est bijective}}$ et Ψ^{-1} est ci-dessus.

6. (a) De l'existence d'une bijection, on déduit alors $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{A}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})}$ ainsi que $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{B}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})}$. En conclusion

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = 2 \times \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})} \tag{9}$$

valable pour tout $n \geqslant 2$.

(b) **(Informatique)** On utilise la relation précédente, sachant qu'il faut s'arrêter avec $n = 1$ et que $\text{Card}(\mathcal{C}_1) = 1$ (l'unique composition [1]).

```
def nombre_compositions(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return 2 * nombre_compositions(n-1)
```

(c) Le nombre $\text{Card}(\mathcal{C}_n)$ vérifie en fait une $\boxed{\text{suite géométrique}}$ de raison 2. Celle-ci démarre à $n = 1$ avec $\text{Card}(\mathcal{C}_1) = 1$. C'est donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \text{Card}(\mathcal{C}_n) = 2^{n-1}} \tag{10}$$

7. (a) Pour $\mathcal{C}_{n,1}$: la seule composition de longueur 1 de n est $[n]$ donc

$$\boxed{\mathcal{C}_{n,1} = \Big\{[n]\Big\}} \tag{11}$$

Pour $\mathcal{C}_{n,n}$: la seule composition de longueur n de n est $[1, 1, \dots, 1]$. Donc

$$\boxed{\mathcal{C}_{n,n} = \Big\{[1, 1, \dots, 1]\Big\}} \tag{12}$$

Ces deux ensembles sont donc toujours de cardinal 1.

(b) Une composition de n de longueur $n-1$ ne peut pas contenir uniquement des 1 (la somme donnerait alors $n-1$). Elle ne peut pas non plus contenir un nombre plus grand ou égal à 3, sinon la somme dépasse $n-1$. Elle est donc composée de plusieurs 1 et d'un seul 2 :

$$\boxed{\mathcal{C}_{n,n-1} = \Big\{[2, 1, \dots, 1], [1, 2, \dots, 1], \dots, [1, 1, \dots, 2]\Big\}} \tag{13}$$

Il y en a donc autant que de choix possibles pour la position du 2 dans la composition. Mais comme la longueur est $n-1$, il y a $n-1$ possibilités. Donc $\boxed{\text{Card}(\mathcal{C}_{n,n-1}) = n-1}$.

8. (a) Avec l'application Φ, si C est de longueur k (avec $k \geqslant 2$) alors $\Phi(C)$ est de longueur $k-1$. La bijection réciproque Φ^{-1} envoie bien une composition de $n-1$ de longueur $k-1$ sur une composition de n de longueur k. Donc Φ induit une $\boxed{\text{bijection entre } \mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{C}_{n-1,k-1}}$.

(b) De même, cette fois sous l'hypothèse $1 \leqslant k \leqslant n-1$: si C est de longueur k alors $\Psi(C)$ est encore de longueur k, et réciproquement avec Ψ^{-1}. Donc Ψ induit une $\boxed{\text{bijection entre } \mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n \text{ et } \mathcal{C}_{n-1,k}}$. Si $k = n$ alors $\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n = \emptyset$ (il n'y a que la composition $[1, 1, \dots, 1]$) et éventuellement $\mathcal{C}_{n-1,n}$ est à interpréter comme vide.

(c) Par les même méthodes que précédemment, on déduit :

$$\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k-1}) \quad \text{et} \quad \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k}) \tag{14}$$

Mais $\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n$ forment une partition de $\mathcal{C}_{n,k}$: c'est la distributivité de l'intersection

$$\mathcal{C}_{n,k} = \mathcal{C}_{n,k} \cap (\mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n) = (\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n) \cup (\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n) \tag{15}$$

On déduit alors

$$\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n) + \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n) \tag{16}$$

$$= \boxed{\text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k-1}) + \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k}) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k})} \tag{17}$$

Cette formule est a priori valable seulement sous l'hypothèse $2 \leqslant k \leqslant n-1$, sauf à rajouter la convention (qui n'est pas donnée par l'énoncé) que $\mathcal{C}_{n-1,k-1} = \emptyset$ si $k = 1$ et $\mathcal{C}_{n-1,k} = \emptyset$ si $k = n$. Mais on a tout de même bien $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,1}) = \mathcal{C}_{n-1,1}$ (= 1 tous les deux) et aussi $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,n}) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,n-1})$ (= 1, idem).

(d) **(Informatique)**

i. Dans la relation précédente, n diminue toujours de 1 et il faut bien sûr s'arrêter à $n = 1$, mais k ne diminue pas toujours. Il faut donc aussi savoir s'arrêter si k devient égal à 1. De plus il faut traiter le cas $k = n$ (ou alors adopter la convention que $\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = 0$ si $k > n$). Si on suppose acquis $1 \leqslant k \leqslant n$ comme argument de départ, on obtient alors :

```python
def nombre(n, k):
    # cas d'initialisation
    if n == 1:
        return 1
    # cas nécessaires à distinguer
    elif k == 1:
        return 1
    elif k == n:
        return 1
    # appel récursif
    else:
        return nombre(n-1, k-1) + nombre(n-1, k)
```

ii. La fonction s'appelle elle-même sur les arguments $(n-1, k-1)$ et $(n-1, k)$. La premier cas va alors appeler la fonction sur $(n-2, k-2)$ et sur $(n-2, k-1)$; quand ce sera fini, le deuxième cas va l'appeler sur $(n-2, k-1)$ et sur $(n-2, k)$. Certaines valeurs sont donc calculées plusieurs fois ! Bien que l'effet en soit négligeable pour des toutes petites valeurs de n, dès que n approche 30 la fonction s'appelle tellement de fois dans tous les sens que le résultat met un certain temps à parvenir, et pour $n = 50$ le résultat n'arrivera jamais. Pourtant, les nombres manipulés ne sont pas du tout hors de portée des capacités de l'ordinateur, et un programme avec une boucle qui garde en mémoire à un seul endroit la liste de tous les $\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k})$ (pour tout n et pour tout k) peut tout à fait donner le résultat instantanément avec $n = 50$. La récursivité est pratique mais n'est pas toujours la méthode la plus efficace.

Remarque : à partir des idées précédentes, il n'est pas très difficile d'écrire une fonction récursive qui fournit la liste de toutes les compositions de n. La fonction s'appelle récursivement elle-même pour le rang $n-1$ et récupère le résultat ; elle forme alors une liste de compositions (une liste de listes) en concaténant 1 comme premier terme à toutes les compositions de $n-1$, puis en ajoutant 1 à tous les premiers éléments de toutes les compositions de $n-1$. Elle renvoie alors son résultat.

(e) *Attention, il est crucial que le quantificateur $\forall k$ soit sous l'hypothèse de récurrence !*
Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : «\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \tbinom{n-1}{k-1}» \tag{18}$$

- Initialisation $n = 1$: alors nécessairement $k = 1$, et on sait $\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{1,1}) = 1$, à droite $\binom{0}{0} = 1$ (le 1 tout au sommet du triangle de Pascal). La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$, supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. On fixe alors $1 \leqslant k \leqslant n+1$, supposons d'abord $2 \leqslant k \leqslant n$. Alors par hypothèse de récurrence

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n+1,k}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k-1}) + \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k-1} \tag{19}$$

par la $\boxed{\text{formule de Pascal}}$.
Si $k = 1$ alors on a en fait

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n+1,1}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,1}) = \binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1 \tag{20}$$

donc la formule est bien vraie aussi. De même si $k = n+1$ on a en fait

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n+1,n+1}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,n}) = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1 \tag{21}$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \geqslant 1}$.

9. (a) On obtient :

$$F_3([3]) = \emptyset \tag{22}$$
$$F_3([2,1]) = \{2\} \tag{23}$$
$$F_3([1,2]) = \{1\} \tag{24}$$
$$F_3([1,1,1]) = \{1,2\} \tag{25}$$

On remarque qu'on obtient effectivement bien une et une seule fois chaque partie de $\{1,2\}$.

(b) On calcule

$$G_{10}(\{2,3,7,8\}) = [2,1,4,1,2] \tag{26}$$
$$G_{12}(\{1,2,3,4,5,6,7\}) = [1,1,1,1,1,1,1,5] \tag{27}$$

Remarque : a priori le calcul de F_n ne dépend presque pas de n, sauf pour la règle $F_n([n])$; par contre l'indice n est bien nécessaire à connaitre pour G_n, car il permet de calculer le dernier élément de la composition $C = G_n(A)$.

(c) **(Informatique)** Il suffit de « suivre le mode d'emploi ». Pour F_n, on utilise une variable accumulatrice pour les sommes de C. Ici on va utiliser la méthode `append`, comme si on ne connaissait pas à l'avance la taille des listes.

```python
def F(n, C):
    A = []
    l = len(C)
    S = 0
    for i in range(l-1):
        S = S + C[i]
        A.append(S)
    return A
```

Ici si C est de longueur 1 (c'est nécessairement $[n]$) alors la boucle n'est pas effectuée et donc la fonction renvoie une liste vide à la fin.

Pour G_n : on doit créer séparément les premiers et derniers termes de la composition, et il est préférable de traiter la liste vide à part :

```python
def G(n, A):
    C = []
    k = len(A)
    if k == 0:
        C.append(n)
        return C
    else:
        C.append(A[0])
        for i in range(1, k):
            C.append(A[i] - A[i-1])
        C.append(n - A[k-1])
        return C
```

La partie vide est traitée à part ; pour une partie $A = \{a_1\}$ de longueur 1 la boucle n'est pas effectuée mais le programme renvoie bien la liste $[a_1, n - a_1]$ de longueur 2.

10. (a)
- Soit C une composition de n. Montrons que $G_n(F_n(C)) = C$. Posons $C = [c_1, ..., c_\ell]$ et $A = F_n(C)$ qu'on range en ordre strictement croissant $A = \{a_1, ..., a_k\}$. Posons $D = G_n(F_n(C))$. Alors $a_1 = c_1$ donc $d_1 = c_1$, et $a_i = a_{i-1} + c_i$ pour $i \leqslant \ell$ donc $d_i = c_i$ pour $i < \ell$. Enfin a_k est par définition la somme $c_1 + \dots + c_{\ell-1}$ donc c'est aussi $n - c_\ell$ et donc $d_\ell = c_\ell$. Autrement dit $D = C$. Il faut séparer le cas $A = \emptyset$, mais il est obtenue par $F_n([n])$ et on a posé $G_n(\emptyset) = [n]$, donc on a encore bien $D = C$.
- Soit A une partie de $[\![1, n-1]\!]$, on pose $A = \{a_1, ..., a_k\}$. On pose $C = G_n(A)$ et $B = F_n(C)$. Là encore, $c_1 = a_1$ et alors on aura $b_1 = a_1$; puis $c_i = a_i - a_{i-1}$ donc on retrouvera $b_i = a_i$. Et enfin a_k sera égal à $c_1 + \dots + c_{\ell-1}$ soit $n - a_k = c_\ell$ et donc on retrouve $b_k = a_k$.

Conclusion : on a montré

$$\boxed{\forall C \in \mathcal{C}_n, G_n(F_n(C)) = C \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{P}([\![1, n-1]\!]),\ F_n(G_n(A)) = A} \tag{28}$$

ce qui montre que F_n et G_n sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(b) On déduit alors

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}([\![1, n-1]\!])) = 2^{n-1}} \tag{29}$$

11. (a) Si C est de longueur ℓ, alors dans $F_n(C)$ on obtient $\ell - 1$ éléments : les sommes sont toutes bien distinctes car les éléments qu'on somme sont strictement positifs, donc elles forment une suite strictement croissante. Si C est de longueur 1 alors c'est $[n]$ et $F_n(C)$ est bien la partie à 0 éléments. Ceci est bien une équivalence, réciproquement G_n appliqué à une partie à $\ell - 1$ éléments redonne une composition de longueur ℓ : encore une fois les éléments de la partie étant rangés en ordre strictement croissant, les différences consécutives sont non-nulles, et la partie ne contenant pas n, le dernier terme $n - a_k$ est aussi non-nul. Bref, on a $\boxed{\text{équivalence}}$.

(b) On connait le cardinal de l'ensemble des parties à $k-1$ éléments noté $\mathcal{P}_{k-1}([\![1, n-1]\!])$: on déduit

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{k-1}([\![1, n-1]\!])) = \binom{n-1}{k-1}} \tag{30}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Alors l'équation $\varphi(x, y, z) = (u, v, w)$ est équivalente à (on ré-écrit les variables dans le bon ordre)

$$\varphi(x, y, z) = (u, v, w) \tag{31}$$

$$\iff \begin{cases} -x - \ \ y + \ \ z = u & L_1 \\ -2x \qquad + \ \ z = v & L_2 \\ -4x - 2y + 3z = w & L_3 \end{cases} \tag{32}$$

$$\iff \begin{cases} x + \ \ y - z = -u & -L_1 \\ \qquad 2y - z = -2u + v & L_2 - 2L_1 \\ \qquad 2y - z = -4u + w & L_3 - 4L_1 \end{cases} \tag{33}$$

$$\iff \begin{cases} x + \ \ y - z \quad = -u & L_1 \\ \qquad 2y - z \quad = -2u + v & L_2 \\ \qquad\qquad 0 = -2u - v + w & L_3 - L_2 \end{cases} \tag{34}$$

Ici le système est $\boxed{\text{échelonné}}$ et de $\boxed{\text{rang } 3}$.

(b) On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$: l'élément (u, v, w) est dans l'image si et seulement si il vérifie $-2u - v + w = 0$ (condition de compatibilité), ce qui n'est pas le cas par exemple de $(1, 0, 0)$.

En même temps $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$: z étant une variable libre, l'élément $(0, 0, 0)$ admet un antécédent pour chacune des valeurs possibles de z et donc admet une infinité d'antécédents. Par exemple $\varphi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$; mais aussi si on résout avec $z = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \varphi(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \tag{35}$$

2. On fixe $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. On reprend les mêmes calculs que précédemment :

$$\varphi_\lambda(x, y, z) = (u, v, w) \tag{36}$$

$$\iff \begin{cases} -(1+\lambda)x - \ \ y + \qquad\quad z = u & L_1 \\ \qquad -2x - \lambda y + \qquad\quad z = v & L_2 \\ \qquad -4x - 2y + (3 - \lambda)z = w & L_3 \end{cases} \tag{37}$$

Cette fois c'est différent. Nous devrions d'abord inverser les lignes pour placer en haut un coefficient devant x qui ne dépende pas de λ (et dont on puisse être certain qu'il ne s'annule pas).

$$\varphi_\lambda(x,y,z) = (u,v,w) \tag{38}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + \lambda y - z = -v & -L_2 \\ 4x + 2y + (\lambda-3)z = -w & -L_3 \\ (1+\lambda)x + y - z = -u & L_1 \end{cases} \tag{39}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + \lambda y - z = -v & L_1 \\ 2(1-\lambda)y + (\lambda-1)z = 2v - w & L_2 - 2L_1 \\ \alpha y + \beta z = -2u + (1+\lambda)v & 2L_3 - (1+\lambda)L_1 \end{cases} \tag{40}$$

où les coefficients α et β sont à calculer à part :

- $\alpha = 2 - \lambda(1+\lambda) = 2 - \lambda - \lambda^2$. Ceci se factorise en $-(\lambda-1)(\lambda+2)$.
- $\beta = -2 + (1+\lambda) = \lambda - 1$.

En résumé en a le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + \lambda y - z = -v & L_1 \\ 2(1-\lambda)y + (\lambda-1)z = 2v - w & L_2 \\ -(\lambda-1)(\lambda+2)y + (\lambda-1)z = -2u + (1+\lambda)v & L_3 \end{cases} \tag{41}$$

Si $\lambda \neq 1$ alors on peut diviser les lignes par $\lambda - 1$:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y - z = -v & L_1 \\ -2y + z = \frac{2v-w}{\lambda-1} & L_2/(\lambda-1) \\ -(\lambda+2)y + z = \frac{-2u+(1+\lambda)v}{\lambda-1} & L_3/(\lambda-1) \end{cases} \tag{42}$$

On peut alors encore échelonner un coup :

$$\begin{cases} 2x + \lambda y - z = -v & L_1 \\ -2y + z = \frac{2v-w}{\lambda-1} & L_2 \\ -\lambda z = 2\frac{-2u+(1+\lambda)v}{\lambda-1} - (\lambda+2)\frac{2v-w}{\lambda-1} & 2L_3 - (\lambda+2)L_2 \end{cases} \tag{43}$$

Le membre de droite n'a pas vraiment d'importance. Si $\lambda \neq 0$, on peut diviser L_3 par λ. On aboutit à la conclusion que : si $\lambda \neq 0, 1$ alors l'équation $\varphi_\lambda(x,y,z) = (u,v,w)$ est un $\boxed{\text{système de Cramer}}$ et donc $\boxed{\varphi_\lambda \text{ est bijective}}$.

L'expression exacte de la bijection réciproque n'est pas très intéressante ici, on s'en passera...

3. Pour $\lambda = 0$ alors $\varphi_0 = \varphi$ et c'est la première question.

   Pour $\lambda = 1$ alors on reprend le système juste avant cette distinction de cas en remplaçant λ par 1, on avait :

$$\begin{cases} 2x + y - z = -v & L_1 \\ 0 = 2v - w & L_2 \\ 0 = -2u + 2v & L_3 \end{cases} \tag{44}$$

   Alors : il y a deux conditions de compatibilité donc $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas surjective}}$, un élément est dans l'image si et seulement si il vérifie à la fois $2v - w = 0$ et $-2u + 2v = 0$. On peut par exemple prendre $(1,0,0)$ qui vérifie la première mais pas la deuxième (il y a une infinité de choix possibles).

   Et il y a deux variables libres donc $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas injective}}$, un élément qui admet des antécédents en admet pour toutes les valeurs possibles de y et de z. Par exemple $\varphi_1(0,0,0) = (0,0,0)$, mais en résolvant avec $z = 1$ et avec $y = 0$ alors $\varphi_1(\frac{1}{2}, 0, 1) = (0,0,0)$.

Exercice 3

1. f est définie si et seulement si $x \neq -1$ et $\frac{1-x}{1+x} \geqslant 0$. On trace alors le tableau de signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

(45)

Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,1]}$.

Dans $(*)$, arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Donc le terme de droite est bien défini sur $\mathcal{D}_f$. Le terme de gauche est la fonction arccos, qui est définie sur $[-1,1]$. A fortiori, les deux termes sont bien définis sur $]-1,1[$.

2. Dérivons pas à pas : d'abord

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{-1\times(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} \tag{46}$$

Alors pour la composition par une racine : f n'est pas dérivable en $x=1$ car la racine n'est pas dérivable en 0, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \tag{47}$$

On lit alors que f est décroissante :

x	-1		1
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

(48)

De plus $f(1)=0$; quand $x \to -1$ alors $x > -1$ donc le quotient $\frac{1-x}{1+x}$ reste positif et tend vers $+\infty$.

3. À gauche, la fonction arccos est strictement décroissante. On sait que $\arccos(1)=0$ et $\arccos(-1)=\pi$. On déduit donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad 0 < \arccos(x) < \pi} \tag{49}$$

À droite : la fonction arctan est croissante, et donc $\arctan(f(x))$ est compris entre $\arctan(0)=0$ et la limite de arctan en $+\infty$ qui est $\frac{\pi}{2}$. Multipliant par 2 alors :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad 0 < 2\arctan(f(x)) < \pi} \tag{50}$$

4. *Vu en cours.*

La fonctions cos est dérivable et de dérivée $-\sin$. Pour $\theta \in]0,\pi[$ alors $-\sin(\theta) < 0$, en particulier $\cos'(\theta)$ ne s'annule pas. Sa bijection réciproque sur $]0,\pi[$ est donc dérivable : cela signifie que $\arccos(x)$ est dérivable pour tout $x \in]-1,1[$, et qu'on a alors

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \tag{51}$$

Ensuite, nous avons la relation de Pythagore $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'où on déduit

$$\Big(\sin(\arccos(x))\Big)^2 = 1 - \Big(\cos(\arccos(x))\Big)^2 = 1 - x^2 \tag{52}$$

Il y a deux possibilités, $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Mais $\theta = \arccos(x)$ est dans $]0,\pi[$ ce qui correspond au domaine sur lequel $\sin(\theta) > 0$. C'est donc que $\sin(\arccos(x)) = +\sqrt{1-x^2}$. En résumé :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{53}$$

5. La dérivée de arccos est ci-dessus. Pour le terme de droite, on connait f, f', et la dérivée de arctan : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arctan(u) = \frac{1}{1+u^2}$. En composant alors pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\arctan(f(x)) = 2 \times f'(x) \times \frac{1}{1+(f(x))^2} = -\frac{2}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \tag{54}$$

Dans la fraction de droite, multiplions en haut et en bas par $1+x$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\arctan(f(x)) = -\frac{2}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1+x}{(1+x)+(1-x)} \tag{55}$$

$$= -\frac{2(1+x)}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times 2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \tag{56}$$

Sous la racine, on peut multiplier en haut et en bas par $1+x$, reconnaissant $(1-x)(1+x) = 1-x^2$:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x)^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} \tag{57}$$

On a alors bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{58}$$

On aboutit à la conclusion que les deux termes de $(*)$ ont la même dérivée. Est-ce suffisant ? ...
On pose

$$F : x \mapsto \arccos(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \tag{59}$$

alors par les calculs précédents :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad F'(x) = 0} \tag{60}$$

donc $\boxed{F \text{ est constante}}$. Il suffit alors de calculer une seule valeur de f, prenons $x=0$: d'une part $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, d'autre part $f(0) = 1$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ donc $2\arctan(f(0)) = \frac{\pi}{2}$. Donc $F(0) = 0$, ainsi

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = 0} \tag{61}$$

et c'est bien ce qu'on voulait.

6. (a) En $x = 1$: à gauche $\boxed{\arccos(1) = 0}$ (car $\cos(0) = 1$). À droite, $f(1) = 0$ et $\arctan(0) = 0$ (car $\tan(0) = 0$) donc $\boxed{2\arctan(f0) = 0}$. Donc $\boxed{(*) \text{ est vraie pour } x = 1}$.

   (b) En $x = -1$: à gauche $\boxed{\arccos(-1) = \pi}$ car $\cos(\pi) = -1$. Comme la fonction arccos est continue (en tant que bijection réciproque d'une fonction continue), c'est aussi la limite pour $x \to -1$.
   À droite le terme n'est vraiment pas défini cependant

$$\lim_{x\to-1} \frac{1-x}{1+x} = +\infty \tag{62}$$

   car c'est une limite $\frac{2}{+\infty}$ où le terme $1+x$ reste positif (on a $x > -1$). Donc $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$. Or on sait que (on change le nom des variables pour composer les limites) $\lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit alors

$$\boxed{\lim_{x\to-1} 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi} \tag{63}$$

   En conclusion l'égalité $(*)$ est $\boxed{\text{« vraie à la limite » pour } x \to -1}$.