DS 3 Mathématiques
Correction

Exercice

- A_n En suivant l'indication :

$$A_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ \text{pair}}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ \text{impair}}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 \tag{1}$$

Dans la première somme on a $0 \leqslant k \leqslant 2n$ et on pose $k = 2j$, donc $0 \leqslant j \leqslant n$. Dans la deuxième on a en fait $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$ et on pose $k = 2j+1$, ce qui correspond à $0 \leqslant j \leqslant n-1$:

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2j+1}{2} \right\rfloor^2 \tag{2}$$

D'une part $\frac{2j}{2} = j$; d'autre part $\frac{2j+1}{2} = j + \frac{1}{2}$, avec j entier, donc la partie entière est simplement égale à j :

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \tag{3}$$

Arrivés ici, on sait qu'on va y arriver… On remarque que le terme d'indice 0 est nul, dans chacune des sommes, et on applique les formules à connaitre :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 && (4)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} && (5)\\
&= \frac{n}{6}\Big((n+1)(2n+1) + (n-1)(2n-1)\Big) && (6)\\
&= \frac{n}{6}\Big(4n^2 + 2\Big) && (7)\\
&= \boxed{\frac{n(2n^2+1)}{3} = A_n} && (8)
\end{aligned}$$

- B_n D'abord on écrit la formule de somme triangulaire et on fait apparaitre la suite géométrique :

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} 3^{j-i} \right) && (9)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(3^j \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^i \right) && (10)
\end{aligned}$$

On applique alors la formule mais il faut faire apparaitre le terme pour $i = 0$:

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} \left(3^j \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) \right) \tag{11}$$

Développons :

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{3}{2} \times 3^j - \frac{3}{2} \times 3^j \times \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} - 3^j \right) \tag{12}$$

On fait alors apparaitre encore une fois les suites géométriques :

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times 3^j - \frac{1}{2} \right) && (13)\\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} 3^j - \frac{n}{2} && (14)
\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à appliquer à nouveau la formule, encore en faisant apparaitre le terme pour $j = 0$:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3} - 1\right) - \frac{n}{2} \qquad (15) \\ &= \boxed{-\frac{3}{4} + \frac{3^{n+1}}{4} - \frac{n}{2} = B_n} \qquad (16) \end{aligned}$$

- C_n On utilise d'abord la propriété de l'exponentielle :

$$C_n = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} 3^{k-1}5^{-2k}\right) \tag{17}$$

On reconnait alors *à peu près* une suite géométrique :

$$C_n = \exp\left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \times \frac{1}{(5^2)^k}\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{25}\right)^k\right) \tag{18}$$

On peut alors appliquer la formule, la borne au-dessus est un $n-1$:

$$C_n = \exp\left(\frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{3}{25}\right)^n}{1-\frac{3}{25}}\right) \tag{19}$$

Quitte à simplifier la fraction, c'est aussi

$$\boxed{C_n = \exp\left(\frac{25}{66} \times \left(1 - \left(\frac{3}{25}\right)^n\right)\right)} \tag{20}$$

Problème 1

1. **(Informatique)** Standard, il y a simplement un terme λ en paramètre :

```python
def suite(lambda, n):
    # u représente u(i) dans la boucle
    u = lambda
    for i in range(n):
        u = (3 * lambda * u) / (lambda + u)
    return u
```

2. (a) D'abord f est bien définie si et seulement si $\lambda + x \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_f$ alors on dérive :

$$f'(x) = \frac{3\lambda \times (\lambda + x) - 3\lambda x \times 1}{(\lambda+x)^2} = \boxed{\frac{3\lambda^2}{(\lambda+x)^2} = f'(x) > 0} \tag{21}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$. On calcule aussi les limites : notamment en $\pm\infty$ on utilise

$$f(x) = \frac{x \times 3\lambda}{x \times (\frac{\lambda}{x} + 1)} = \frac{3\lambda}{\frac{\lambda}{x} + 1} \tag{22}$$

et donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3\lambda}{1} = 3\lambda \tag{23}$$

En λ la limite sera $\pm\infty$ et il faut distinguer limite à gauche et à droite en faisant attention aux signes. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\lambda$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	3λ	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3λ

(24)

(b) On écrit :

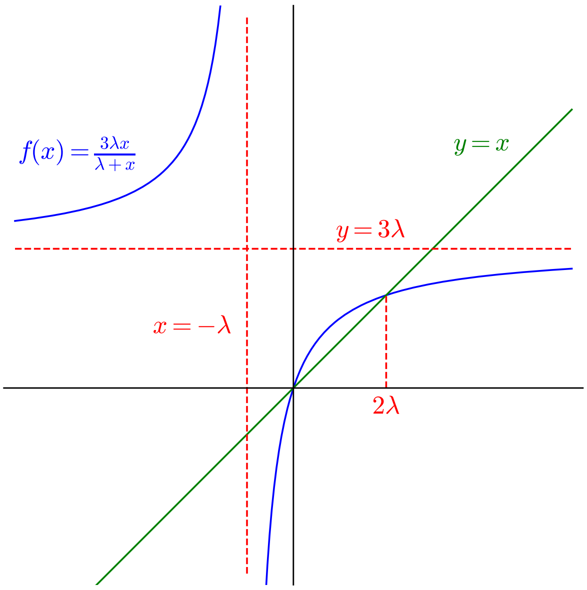
$$f(x) - x = \frac{3\lambda x}{\lambda + x} - x = \frac{3\lambda x - x(\lambda + x)}{\lambda + x} = \frac{2\lambda x - x^2}{\lambda + x} = \boxed{-\frac{x(x-2\lambda)}{\lambda + x} = f(x) - x} \tag{25}$$

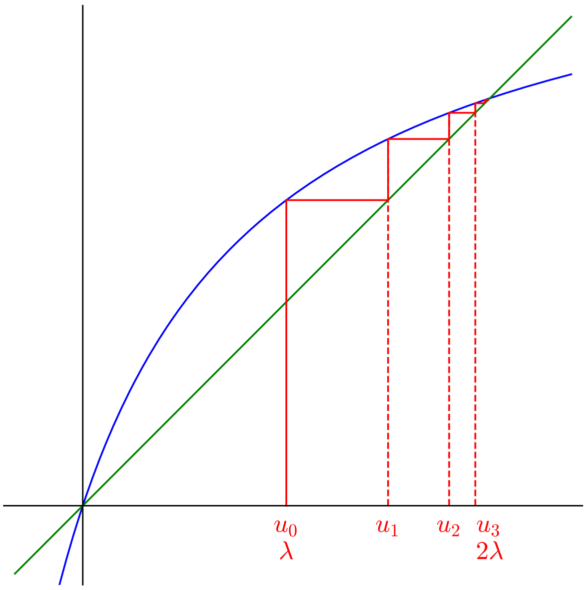
Cela permet de tracer le tableau de signe en entier (on rappelle que $\lambda > 0$) :

x	$-\infty$		$-\lambda$		0		2λ		$+\infty$
$x(x-2\lambda)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lambda + x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x) - x$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

(26)

(c) On a alors de quoi représenter les deux courbes, avec les asympotes. En fait, peu importe la valeur exacte de λ, car tout est homogène… On construit ensuite les termes de la suite, ici en zoomant sur la partie intéressante.





(d) On conjecture que :

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ reste entre } \lambda \text{ et } 2\lambda\text{, est croissante, et converge vers } 2\lambda.}$

3. *Tout est déjà prêt pour pouvoir répondre à cette question presque sans nouveaux calculs !*

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$ ». Cette propriété contient d'un coup la conjecture ci-dessus (sauf la limite), en plus avec des inégalités strictes au bon endroit.

- $n = 0$: $u_0 = \lambda$ donc on a déjà $\lambda \leqslant u_0 < 2\lambda$. De plus pour $x \in [\lambda, 2\lambda[$ alors on sait que (tableau de signe avec $0 < x < 2\lambda$) $f(x) - x > 0$ donc $u_1 = f(u_0) > u_0$. Et comme $u_0 < 2\lambda$ et que f est strictement croissante alors $u_1 = f(u_0) < f(2\lambda) = 2\lambda$ ($f(2\lambda) = 2\lambda$ est déjà conséquence du tableau de signe). En résumé on a bien $\lambda \leqslant u_0 < u_1 < 2\lambda$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Sur $[\lambda, 2\lambda]$ on sait que f est strictement croissance, et donc directement

$$\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(2\lambda) \tag{27}$$

À droite encore une fois $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $f(2\lambda) = 2\lambda$. À gauche on sait par le tableau de signe $f(\lambda) \geqslant \lambda$. On en déduit donc

$$\boxed{\lambda \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 2\lambda} \tag{28}$$

et c'est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'abord par nos hypothèses u_n ne s'annule jamais. On calule alors :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{\lambda + u_n}{3\lambda u_n} = \frac{\lambda}{3\lambda u_n} + \frac{u_n}{3\lambda u_n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{u_n} + \frac{1}{3\lambda} \tag{29}$$

On reconnait bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n + \frac{1}{3\lambda}} \tag{30}$$

C'est bien une suite arithmético-géométrique.

(b) On cherche alors $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$c = \frac{1}{3} \times c + \frac{1}{3\lambda} \tag{31}$$

On trouve $\frac{2}{3}c = \frac{1}{3\lambda}$ d'où $\boxed{c = \frac{1}{2\lambda}}$.

On pose alors une suite $w_n = v_n - c$. En écrivant l'une au-dessus de l'autre : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n + \frac{1}{3\lambda} \tag{32}$$

$$c = \frac{1}{3} \times c + \frac{1}{3\lambda} \tag{33}$$

on trouve $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$: c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. De plus $w_0 = v_0 - c = \frac{1}{u_0} - c = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{2\lambda} \times \frac{1}{3^n} \tag{34}$$

puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{2\lambda} \times \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2\lambda}} \tag{35}$$

(c) Le terme $\frac{1}{3^n}$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$ et donc on en déduit directement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2\lambda}} \tag{36}$$

(d) En passant à l'inverse, on déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\frac{1}{2\lambda} \times \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2\lambda}}} \tag{37}$$

et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2\lambda} \tag{38}$$

Cela confirme la conjecture.

Problème 2

1. **(Informatique)** Standard, c'est une somme de 1 à n, attention au `range` !

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + k / (k**4 + k**2 + 1)
    return S
```

2. (a) L'équation $z^2+z+1=0$ a pour discriminant $\Delta = 1^2-4=-3=(i\sqrt{3})^2$. Les deux solutions sont
$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \tag{39}$$
L'unique solution de partie imaginaire positive est donc
$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{40}$$
On calcule alors directement $|\alpha|^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$ donc $|\alpha| = 1$. Pour le mettre sous forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ il faut donc trouver θ tel que
$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{41}$$
et il est bien connu que c'est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Conclusion :
$$\boxed{\alpha = e^{2i\pi/3}} \tag{42}$$
(b) Avec la formule précédente c'est clair : $\boxed{\alpha^3 = e^{2i\pi} = 1}$.

(c) On calcule à la main (par la forme algébrique ou bien par la forme exponentielle) :
$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\alpha - 1 \\ -\alpha &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\alpha^2 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha + 1 \end{aligned}} \tag{43}$$
En fait, on sait déjà par définition $\alpha^2+\alpha+1=0$, ce qui donne $\alpha^2 = -\alpha-1$. Et $-\alpha$ est égal à $-\alpha$ lui-même et pas autre chose…

(d) Soit $z \in \mathbb{C}$. Calcul :
$$\boxed{(z-\alpha)(z-\alpha^2) = z^2 - (\alpha+\alpha^2)z + \alpha^3 = z^2+z+1} \tag{44}$$
et
$$\boxed{(z+\alpha)(z+\alpha^2) = z^2 + (\alpha+\alpha^2)z + \alpha^3 = z^2-z+1} \tag{45}$$
en utilisant les relations de la question précédente.

3. Calculons, en partant du résultat final :
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+\alpha)(k-\alpha-1)} - \frac{1}{(k-\alpha)(k+\alpha+1)}\right) && (46)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha^2)} - \frac{1}{(k-\alpha)(k-\alpha^2)}\right) && (47)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}\right) && (48)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} && (49)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k^4+k^2+1} && (50)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1} && (51)\\
&= \boxed{S_n} && (52)
\end{aligned}$$
Éventuellement on a besoin de développer à part $(k^2-k+1)(k^2+k+1) = k^4+k^2+1$.

4. On reconnait alors une $\boxed{\text{somme téléscopique}}$, car remplacer k par $k-1$ dans la fraction de gauche donne la fraction de droite ! Nous allons tout de même rédiger correctement : d'abord

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+\alpha)(k-\alpha-1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)(k+\alpha+1)}\right) \tag{53}$$

À droite, posons le changement d'indice $j = k+1$, c'est-à-dire $k = j-1$. Quand k varie de 1 à n alors j varie de 2 à $n+1$:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+\alpha)(k-\alpha-1)} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{(j-1-\alpha)(j+\alpha)}\right) \tag{54}$$

On fait alors apparaitre la « partie commune », c'est-à-dire la somme sur les indices de 2 à n :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{-\alpha(1+\alpha)} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+\alpha)(k-\alpha-1)}\right) - \left(\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{(j-1-\alpha)(j+\alpha)} + \frac{1}{(n-\alpha)(n+1+\alpha)}\right)\right) \tag{55}$$

Puis on simplifie les deux grosses sommes qui sont les mêmes :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\alpha(1+\alpha)} - \frac{1}{(n-\alpha)(n+1+\alpha)}\right)} \tag{56}$$

Il reste à calculer les termes, car la somme S_n de départ était clairement un nombre réel (positif) et il n'est pas question de laisser le résultat dépendre de α. Alors $-\alpha(1+\alpha) = +\alpha^3 = 1$ et $(n-\alpha)(n+1+\alpha) = n^2 + (1+\alpha-\alpha)n - \alpha(1+\alpha) = n^2+n+1$. En résumé :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}} \tag{57}$$

Problème 3

1. **(Informatique)**

   (a) Il faut avoir sous les yeux la formule : si $z = a+bi$ et $w = c+di$ ($(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$) alors

$$z \times w = (ad-bc) + (ac+bd)i \tag{58}$$

   d'où la fonction

```python
def produit(z, w):
    a = z[0]
    b = z[1]
    c = w[0]
    d = w[1]
    return [a*d - b*c, a*c + b*d]
```

   (b) Idem, il faut avoir sous les yeux

$$\frac{z}{w} = \frac{z\times\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(ad+bc)+(ac-bd)i}{c^2+d^2} = \frac{ad+bc}{c^2+d^2} + \frac{ac-bd}{c^2+d^2}i \tag{59}$$

   D'où

```python
def quotient(z, w):
    a = z[0]
    b = z[1]
    c = w[0]
    d = w[1]
    return [(a*d + b*c) / (c**2 + d**2), (a*c - b*d) / (c**2 + d**2)]
```

(c) C'est un produit n fois de z avec lui-même, avec la fonction `produit` précédente. On initialise la puissance à la valeur `[1, 0]`, c'est-à-dire le 1 des nombres complexes que nous sommes en train de modéliser.

```
def puissance(z, n):
    P = [1, 0]
    for i in range(n):
        P = produit(P, z)
    return P
```

(d) Les erreurs claires :

- Au départ, si on définit z à partir de la fonction quotient, alors le nombre complexe $2+i$ est représenté par la liste `[2, 1]`, et de même $2-i$ est représenté par `[2, -1]`.
- Les bornes du `range` ne sont pas correctes, si on veut tester jusqu'à N inclus il faut écrire `range(1, N+1)`.
- La condition `puissance(z, n) == 1` n'a pas de sens : comme précédemment, il faut tester l'égalité avec le nombre 1 des complexes que nous sommes en train de modéliser, c'est-à-dire la liste `[1, 0]`.
- Il y a un problème de logique dans la boucle. Si la condition $z^n = 1$ est réalisée, alors il est bien vrai qu'on peut utiliser `return n` (arrêter tout et renvoyer n). Sinon, cela ne signifie pas que nous avons terminé : il faut simplement continuer la boucle. Le `return None` se situe alors *à la fin* et *en dehors de la boucle* : si on arrive jusque là, c'est qu'on ne s'est pas arrêté plus tôt, donc qu'on n'a pas trouvé n.

En résumé $\boxed{\text{on n'est pas du tout satisfait}}$, rien ne va... Version corrigée :

```
# fonction de test
def test(N):
    # introduire z *par rapport à notre modélisation des nombres complexes*
    z = quotient([2, 1], [2, -1])
    # tester pour n entre 1 et N *inclus*
    for n in range(1, N+1):
        # condition z puissance n égal 1, *dans notre modélisation des complexes*
        if puissance(z, n) == [1, 0]:
            # on a trouvé n, *donc on peut s'arrêter*
            return n
    # *si on arrive ici, c'est qu'on n'a pas trouvé n*
    return None
```

Enfin deux points d'amélioration possibles :

- L'utilisation de la fonction `quotient` n'est pas franchement nécessaire si on calcule à la main $z = \frac{3+4i}{5}$.
- Plutôt que d'appeler la fonction `puissance` à chaque fois dans la boucle, ce qui fait recalculer à chaque fois le produit $z \times z \times \cdots \times z$ depuis le début, on peut aussi calculer les puissances *au fur et à mesure* de la boucle.

Cela donne :

```
def test_mieux(N):
    z = [3/5, 4/5]
    P = z # on part de z puissance 1
    for n in range(1, N+1):
        if P == [1, 0]:
            return n
        P = produit(P, z)
    return None
```

2. Calcul direct :

$$|z| = \frac{|2+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{1 = |z|} \tag{60}$$

3. Enchainement de calculs, directement $\boxed{\text{par équivalence}}$:

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n = 1^n && (61)\\
&\iff \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = 1 && (62)\\
&\iff (2+i)^n = (2-i)^n && (63)\\
&\iff (2+i)^n - (2-i)^n = 0 && (64)\\
&\iff \frac{1}{2i}\Big((2+i)^n - (2-i)^n\Big) = 0 && (65)
\end{aligned}$$

(rien n'interdit de diviser par $2i$ à la dernière étape, l'inverse étant de multiplier par $2i$ qui est non-nul)

4. On calcule pas à pas

$$\begin{aligned}
&(2+i)^2 = 3+4i \qquad (2+i)^3 = 2+11i \qquad (2+i)^4 = -7+24i && (66)\\
&(2-i)^2 = 3-4i \qquad (2-i)^3 = 2-11i \qquad (2-i)^4 = -7-24i && (67)
\end{aligned}$$

d'où en remplaçant

$$\boxed{u_0 = 0} \qquad \boxed{u_1 = 1} \qquad \boxed{u_2 = 4} \qquad \boxed{u_3 = 11} \qquad \boxed{u_4 = 24} \tag{68}$$

5. (a) *Méthode du DM !*

Le terme u_n est bien de la forme $Aq_1^n + Bq_2^n$ où $q_1 = 2+i$, $q_2 = 2-i$, $A = \frac{1}{2i}$ et $B = -\frac{1}{2i}$. C'est typiquement une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, associée à l'équation caractéristique dont q_1 et q_2 sont les deux racines. Or $q_1 + q_2 = 4$ et $q_1 \times q_2 = 5$, l'équation de degré 2 est (relation entre coefficients et somme et produit des racines) $(q-q_1)(q-q_2) = 0$ c'est-à-dire $q^2 - 4q + 5$. Cela *démontre* que u_n vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 5u_n = 0$. Mieux, c'est l'unique suite qui vérifie :

$$\boxed{u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n} \tag{69}$$

(b) *C'est presque évident, mais c'est tout de même une récurrence !*

On démontre par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est entier.

- u_0 est entier.
- u_1 est entier.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et u_{n+1} soient entiers. Alors par la formule ci-dessus u_{n+2} est encore entier.

(c) On démontre par récurrence double que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un nombre entier $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 5p_n - (-1)^n$. La récurrence démarre nécessairement à $n = 1$ et pas $n = 0$ (car $u_0 = 0$, ce qui correspond au fait que $z^0 = 1$).

- Initialisation $n = 1$: $u_1 = 1$, ce qu'on peut écrire $5 \times 0 - (-1)^1$. On pose donc $\boxed{p_1 = 0}$.
- Initialisation $n = 2$: $u_2 = 4$, ce qu'on peut écrire $5 \times 1 - (-1)^2$. On pose donc $\boxed{p_2 = 1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait les nombres p_n et p_{n+1}. Par la relation de récurrence vérifiée par notre suite, on déduit alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 4 \times (5p_{n+1} - (-1)^{n+1}) - 5 \times (5p_n - (-1)^n) && (70)\\
&= 20p_{n+1} - 25p_n - 4 \times (-1)^{n+1} + 5 \times (-1)^n && (71)
\end{aligned}$$

Or on remarque que $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ et $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 20p_{n+1} - 25p_n + 4 \times (-1)^{n+2} + 5 \times (-1)^{n+2} && (72)\\
&= 20p_{n+1} - 25p_n + 9 \times (-1)^{n+2} && (73)
\end{aligned}$$

Il reste à faire apparaitre $9 \times (-1)^{n+2} = (10-1) \times (-1)^{n+2} = 10 \times (-1)^{n+2} - (-1)^{n+2}$. Alors :

$$u_{n+2} = \left(20p_{n+1} - 25p_n + 10 \times (-1)^{n+2}\right) - (-1)^{n+2} \tag{74}$$

$$= \boxed{5 \times \underbrace{\left((4p_{n+1} - 5p_n + 2 \times (-1)^n\right)}_{p_{n+2}} - (-1)^{n+2} = u_{n+2}} \tag{75}$$

et à poser p_{n+2} ci-dessus, qui est bien entier.

Remarque : ceux qui ont fait de l'arithmétique auront reconnu $u_n \equiv -(-1)^n \bmod 5$, ce qu'on peut retrouver assez facilement en raisonnant avec la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$ qu'on projette modulo 5. Cela donne directement $u_{n+2} \equiv -u_{n+1} \bmod 5$: sachant en plus $u_1 = 1$, alors à partir du rang $n = 1$, le terme u_n alterne entre $+1$ et -1 modulo 5. En particulier il ne s'annule jamais.

6. On en conclut comme annoncé au début de l'exercice qu'il n'existe jamais d'entier $n \geqslant 1$ tel que $z^n = 0$: par l'absurde, cela signifierait que $u_n = 0$, et on aurait alors $p_n = \frac{(-1)^n}{5}$. Mais p_n est entier, et $\frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{5}$ ne sont pas entiers : $\boxed{\text{c'est absurde}}$.
7. (a) Directement :

$$\boxed{z = \frac{3+4i}{5}} \tag{76}$$

On sait déjà $|z| = 1$. Sous forme exponentielle, alors $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{3}{5} \\ \sin(\theta) = \dfrac{4}{5} \end{cases} \tag{77}$$

On peut alors prendre $\boxed{\theta = +\arccos(\frac{3}{5})}$: cet angle est dans $[0, \pi]$, domaine où le sinus est positif, comme nous l'indique la deuxième équation.

(b) Démontrons par l'absurde, en gardant en tête que la condition $z^n = 1$ serait équivalente à $e^{ni \arccos(3/5)} = 1$ c'est-à-dire qu'il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n \arccos(\frac{3}{5}) = 2k\pi$.

Supposons qu'il existe de tels p et q, alors on obtient $q \arccos(\frac{3}{5}) = p\pi$ et donc $2q \arccos(\frac{3}{5}) = 2p\pi$. Cela signifie donc que $z^{2q} = 1$. Or nous avons vu que cela est impossible dès que $q \geqslant 1$.

$\boxed{\text{De tels nombres } p \text{ et } q \text{ ne peuvent donc pas exister.}}$

Problème 4

1. C'est un cas particulier de somme des termes successifs d'une suite géométrique :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} \tag{78}$$

Or $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$. Donc $\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0}$.

2. D'une part $\omega^4 = e^{8i\pi/5}$, et $\overline{\omega} = e^{-2i\pi/5}$. Mais les deux arguments diffèrent de 2π : $-\frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{8\pi}{5}$. Donc ces deux nombres sont égaux : $\boxed{\overline{\omega} = \omega^4}$.

De même, $\overline{\omega^2} = e^{-4i\pi/5}$ et en ajoutant 2π dans l'argument ceci est aussi $e^{6i\pi/5}$. D'où on déduit $\boxed{\overline{\omega^2} = \omega^3}$.

3. L'équation précédente nous donne alors

$$0 = 1 + \omega + \omega^2 + \overline{\omega^2} + \overline{\omega} \tag{79}$$

$$\iff 0 = 1 + \left(\omega + \overline{\omega}\right) + \left(\omega^2 + \overline{\omega^2}\right) \tag{80}$$

On reconnait alors $\omega + \overline{\omega} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$, mais à droite $\omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. On doit alors utiliser la formule de duplication pour cos — ou mieux, écrire $\omega^2 + \overline{\omega^2} = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2$. On trouve ainsi

$$0 = -1 + 2\left(\omega + \overline{\omega}\right) + \left(\omega + \overline{\omega}\right)^2 \tag{81}$$

ce qui donne en remplaçant dans les deux parenthèses par $2\cos(\frac{2\pi}{5})$:

$$\boxed{0=-1+4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \tag{82}$$

C'est bien l'équation $4x^2+2x-1=0$ avec $x=\cos(\frac{2\pi}{5})$.

4. Pour cette équation de degré 2 alors $\Delta=2^2+4\times 4=20=4\times 5$. Les solutions sont donc $x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}$ soit

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \tag{83}$$

Or ici $x_1>0$ et $x_2<0$, en effet on sait au moins $2<\sqrt{5}<3$. Et l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est bien dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ (c'est $\frac{4\pi}{10}$, alors que $\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{10}$) donc on sait déjà $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$. C'est donc x_2 :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \tag{84}$$

On en déduit $\sin(\frac{2\pi}{5})$ grâce à la relation de Pythagore :

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1 \tag{85}$$

Cela donne, en calculant soigneusement :

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{1+5-2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16} \tag{86}$$

Il y a deux racines possibles mais, comme ci-dessus, on sait déjà $\sin(\frac{2\pi}{5})>0$. C'est donc

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} \tag{87}$$

5. On déduit alors

$$\boxed{z=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} \tag{88}$$

6. La méthode est « Utiliser la formule de duplication pour diviser ». On sait que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1 \tag{89}$$

ce qui donne une équation $\cos^2(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\cos(\frac{2\pi}{5})}{2}$. Celle-ci se simplifie en

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{8} \tag{90}$$

d'où (de même, on sait déjà $\cos(\frac{\pi}{5})>0$)

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}} \tag{91}$$

Remarque : quitte à multiplier en haut et en bas par $\sqrt{2}$, c'est aussi $\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$. Or $6+2\sqrt{5}=(1+\sqrt{5})^2$ et donc on trouve

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \tag{92}$$

Pour le sinus, on peut alors utiliser la relation de Pythagore, ou aussi la duplication

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \tag{93}$$

qui donne $\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{1-\cos(\frac{2\pi}{5})}{2}$ soit

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \tag{94}$$

Sachant d'avance $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$, c'est donc

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}} \tag{95}$$

En multipliant en haut et en bas par $\sqrt{2}$ on trouve aussi

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} \tag{96}$$