DS 2 Mathématiques

Exercice 1

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$(E_1) \quad \lfloor \ln^2(x+3) \rfloor = 9 \qquad\qquad (E_2) \quad |x-1| = x^2 - 5$$

2. (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $5\sqrt{3}\cos(\theta) - 15\sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi)$.
   (b) Pour quels $m \in \mathbb{R}$ l'équation (F) : $5\sqrt{3}\cos(\theta) - 15\sin(\theta) = m$ admet-elle des solutions ?
   (c) Donner toutes les solutions de (F) pour $m = 5\sqrt{6}$.

Exercice 2

Soit l'équation d'iconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(G) \qquad z^3 - (4-2i)z^2 + (13-8i)z + 26i = 0$$

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. En séparant les parties réelles et imaginaires, donner deux équations à coefficients réels telles que $z = a$ est solution de (G) si et seulement si a est solution de ces deux équations.
   (b) En déduire que (G) n'a pas de solution qui soit réelle.
2. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4-2i)z^2 + (13-8i)z + 26i = (z - bi)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$.
3. Montrer de même qu'il y a un unique $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = bi$ soit solution de (G), et donner ce b.
4. En déduire toutes les solutions de (G).

Exercice d'informatique

```python
def hein(x):
    n = 0
    while n*n < x:
        n = n + 1
    return n
```

1. Écrire une fonction `maximum(a, b)` qui renvoie le plus grand des deux nombres entre `a` et `b`.
2. On considère la fonction `hein` ci-contre.
   (a) Que renvoie `hein(0)` ? `hein(3)` ? `hein(4)` ? `hein(10)` ?
   (b) Corriger la fonction (en la ré-écrivant sur sa copie, et en expliquant bien ce qu'il faut modifier) pour qu'elle renvoie la partie entière de la racine carrée de `x`, quand `x` est supposé positif, sans utiliser la fonction partie entière ni la fonction racine carrée.
3. Les farines utilisées en boulangerie sont classées selon leur taux de cendres (en pourcentage). Plus le taux est faible plus la farine est blanche et pure. Pour un taux inférieur à 0,5, on parle de *farine très blanche* (pâtisserie fine). Pour un taux entre 0,5 et 0,75 on parle de *farine blanche* (tous usages). Pour un taux jusqu'à 0,9 ce sont des *farines bises* (pains rustiques), et au-delà ce sont des *farines intégrales* (pains spéciaux).
   Écrire une fonction `farine(t)` qui prend en argument le taux de cendres comme ci-dessus, et affiche le type de farine correspondant.
4. Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie le terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n + 5}$.

Problème 1

Le but est de simplifier l'écriture de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{x^3 - 3x}{2}\right)$$

1. Rappeler la définition de la fonction arccos.
2. On pose $g : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x}{2}$.
   (a) Tracer le tableau de variations de g en précisant les images de -2 et 2.

   (b) En déduire le domaine de définition de f.

3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\cos(3\theta)$.
   (b) Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [-2, 2]$, $\cos(3\arccos(ax)) = g(x)$.
4. On fixe $x \in [1, 2]$.
   (a) Déterminer un encadrement de $3\arccos(x/2)$.
   (b) Déduire des résulats précédents que $f(x) = \arccos(x/2)$.
5. Soit $x \in \,]-1, 1]$. Avec les mêmes méthodes, justifier que $f(x) = 2\pi - \arccos(x/2)$.
6. Déterminer une expression similaire pour $f(x)$ lorsque $x \in [-2, -1[$.

Problème 2

Pour une partie non-vide $A \subset \mathbb{R}$ et pour un élément $x \in \mathbb{R}$, on définit la *distance de x à A*, notée $d_A(x)$, comme

$$d_A(x) = \mathrm{Inf}\left\{|x-a| \;\middle|\; a \in A\right\}$$

On admet que $d_A(x)$ est toujours bien défini et est un réel positif.
Par exemple si $A = \{0\}$ alors $d_A(x)$ est simplement égal à $|x|$.

1. On prend $A = \{0, 1\}$, auquel cas $d_A(x) = \mathrm{Min}\left\{|x|, |x-1|\right\}$.
   (a) Donner une formule simple pour $d_A(x)$ avec une seule disjonction de cas selon $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Justifier que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
2. On prend $A = [0, 1[$.
   (a) Donner de même une formule simple par disjonction de cas pour $d_A(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Est-il vrai que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in A$? Justifier.
3. On prend $A = \mathbb{Z}$.
   (a) Justifier brièvement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_A(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Justifier que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.
   (c) Justifier la formule suivante : $d_A(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{2} \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{sinon} \end{cases}$
4. Soient les nombres $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Calculer φ^2, $\overline{\varphi}^2$, $\varphi + \overline{\varphi}$ et $\varphi\overline{\varphi}$.
   (b) Donner des encadrements de φ et de $\overline{\varphi}$ dans des intervalles de longueur inférieure à $\frac{1}{8}$.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varphi^n + \overline{\varphi}^n$.
   (d) Justifier : $\forall n \geqslant 2$, $|\overline{\varphi}^n| < \frac{1}{2}$ et en déduire $\lfloor \overline{\varphi}^n \rfloor$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) En déduire une expression de $\lfloor \varphi^n \rfloor$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ faisant intervenir u_n.
   (f) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{\mathbb{Z}}(\varphi^n) = 0$.
5. On considère maintenant $A = \mathbb{Q}$.
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire que $d_A(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.