DS 2 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. - (E_1) D'abord il y a un domaine de définition : l'équation est définie si et seulement si $x+3>0$ donc $\boxed{\mathcal{D}_{(E_1)} =]-3,+\infty[}$. Puis pour tout $x \in \mathcal{D}_{(E_1)}$:

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 9 \leqslant \ln^2(x+3) < 10 &(1)\\ &\iff -\sqrt{10} < \ln(x+3) \leqslant -3 \text{ ou } 3 \leqslant \ln(x+3) < \sqrt{10} &(2)\\ &\iff e^{-\sqrt{10}} < x+3 \leqslant e^{-3} \text{ ou } e^3 \leqslant x+3 < e^{\sqrt{10}} &(3)\\ &\iff e^{-\sqrt{10}} - 3 < x \leqslant e^{-3} - 3 \text{ ou } e^3 - 3 \leqslant x < e^{\sqrt{10}} - 3 &(4)\end{aligned}$$

Ce sont bien des équivalences à chaque étape, la première est la définition même de la partie entière, les suivantes par les propriétés usuelles de la fonction carrée puis de logarithme et exponentielle.
Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left]e^{-\sqrt{10}} - 3, e^{-3} - 3\right] \cup \left[e^3 - 3, e^{\sqrt{10}} - 3\right[} \qquad (5)$$

- (E_2) Il y a deux cas à considérer pour la valeur absolue :
  - Cas $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$: alors

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff x - 1 = x^2 - 5 &(6)\\ &\iff x^2 - x - 4 = 0 &(7)\end{aligned}$$

On calcule alors $\Delta = 1^2 + 4 \times 4 = 17 > 0$, deux solutions $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Il faut vérifier si elles sont bien dans notre cas considéré $x \geqslant 1$. Or $16 < 17 < 25$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$, on trouve alors $-2 < \frac{1-\sqrt{17}}{2} < -\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2} < \frac{1+\sqrt{17}}{2} < 3$: seul x_2 est bien solution dans ce cas.
  - Cas $x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$: alors

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 1 - x = x^2 - 5 &(8)\\ &\iff x^2 + x - 6 = 0 &(9)\end{aligned}$$

On calcule alors $\Delta = 1^2 + 4 \times 6 = 25$, deux solutions $x = \frac{-1\pm 5}{2}$ soit $x_3 = -3$ et $x_4 = 2$. Or nous sommes dans le cas $x \leqslant 1$ donc seul x_3 est bien solution ici.

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{-3, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}} \qquad (10)$$

2. (a) - Analyse : on cherche $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}r\cos(\theta+\varphi) &= r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) &(11)\\ &= \big(r\cos(\varphi)\big)\cos(\theta) - \big(r\sin(\varphi)\big)\sin(\theta) &(12)\\ &= 5\sqrt{3}\cos(\theta) - 15\sin(\theta) &(13)\end{aligned}$$

Il y a égalité dès que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 5\sqrt{3} \\ r\sin(\varphi) = 15 \end{cases} \qquad (14)$$

On trouve alors $r^2 = (5\sqrt{3})^2 + 15^5 = 5^2(3+3^2) = 5^2 \times 12$ donc on prend $r = 5\sqrt{12} = 10\sqrt{3}$. Puis on veut φ tel que

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad (15)$$

C'est une valeur remarquable : on prend $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
Attention à la rédaction : on ne prétend pas que φ est unique, car on peut toujours lui rajouter un multiple de 2π (pas de « donc $\varphi = \ldots$ ») et ce n'est pas non plus la peine de donner toutes les solutions. Ce qu'on prétend, c'est que si on choisit cette valeur-là, alors les coefficients devant les $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont égaux et notre égalité de départ est bien vérifiée. En disant cela, la synthèse est alors automatique.

- Synthèse : on pose $\boxed{r = 10\sqrt{3}}$ et $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$. Les calculs ci-dessus montrent bien que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{5\sqrt{3}\cos(\theta) - 15\sin(\theta) = 10\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} \tag{16}$$

(b) Par la question précédente, l'équation (F) est équivalente à

$$(F) \iff 10\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = m \tag{17}$$
$$\iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{10\sqrt{3}} \tag{18}$$

Elle admet donc des solutions si et seulement si $-1 \leqslant \frac{m}{10\sqrt{3}} \leqslant 1$ (cela doit être une valeur prise par un cosinus), c'est à dire si et seulement si

$$\boxed{-10\sqrt{3} \leqslant m \leqslant 10\sqrt{3}} \tag{19}$$

(c) On fixe $m = 5\sqrt{6}$, alors par les calculs ci-dessus

$$(F) \iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{10\sqrt{3}} \tag{20}$$
$$\iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5 \times \sqrt{3} \times 2} \tag{21}$$
$$\iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{22}$$

On reconnait une valeur remarquable du cosinus. Donc

$$(F) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ \left(\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \tag{23}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ \left(\theta = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right) \tag{24}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(F)} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}} \tag{25}$$

On n'a pas tous les points à la question si on ne donne pas jusqu'au bout les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques et qu'on laisse un $\arccos\left(\frac{5\sqrt{6}}{10\sqrt{3}}\right)$ *ou autre.*

Exercice 2

1. (a) $z = a$ est solution si et seulement si les deux équations suivantes sont vérifiées :

$$\boxed{\begin{cases} a^3 - 4a^2 + 13a = 0 \\ 2a^2 - 8a + 26 = 0 \end{cases}} \tag{26}$$

(b) La première de ces deux équations se factorise en $a(a^2 - 4a + 13) = 0$. Une solution est $a = 0$, mais elle n'est pas solution de la deuxième équation. Les autres solutions sont racines de $a^2 - 4a + 13$: on calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times 13 = -36 < 0$ donc elle n'a pas d'autres solutions réelles.
Ceci démontre que $\boxed{(G) \text{ n'a pas de solutions réelles}}$.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors le nombre $z = bi$ est solution de (G) si et seulement si

$$(G) \iff b^3i^3 - (4-2i)b^2i^2 + (13-8i)bi + 26i = 0 \tag{27}$$
$$\iff -b^3i + (4-2i)b^2 + (13i+8)b + 26i = 0 \tag{28}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} 4b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - 2b^2 + 13b + 26 = 0 \end{cases}} \tag{29}$$

Là encore la première équation se factorise en $4b(b+2)$. Elle admet pour solutions 0 (qui n'est pas solution de la deuxième) et -2, dont on vérifie qu'il est bien solution de la deuxième.
C'est donc que $\boxed{z = -2i}$ est l'unique solution imaginaire pure de (G).

3. *Classique, mais à bien rédiger avec analyse-synthèse.*
   - Analyse : on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *(remarque : la consigne nous dit que ces nombres doivent être réels)* tels que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z^3 - (4-2i)z^2 + (13-8i)z + 26i = (z+2i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) \tag{30}$$
$$= \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + 2i\alpha z^2 + 2i\beta z + 2i\gamma \tag{31}$$
$$= \alpha z^3 + (\beta + 2\alpha i)z^2 + (\gamma + 2\beta i)z + 2\gamma i \tag{32}$$

   Ces équations sont vérifiées dès que

$$\begin{cases} \alpha = 1 & (L_1) \\ \beta + 2\alpha i = -(4-2i) & (L_2) \\ \gamma + 2\beta i = 13 - 8i & (L_3) \\ 2\gamma i = 26i & (L_4) \end{cases} \tag{33}$$

   Là encore on ne cherche pas à avoir unicité, on prétend seulement que notre égalité voulue est vraie si on choisit (α, β, γ) qui vérifient les quatre équations ci-dessus.
   On trouve alors directement $\alpha = 1$ (avec (L_1)), $\gamma = 13$ (avec (L_4)), puis $\beta = -4$ (avec par exemple (L_2), mais il faut vérifier qu'alors (L_3) est bien vérifiée aussi).
   - Synthèse : on pose $\boxed{\alpha = 1}$, $\boxed{\beta = -4}$ et $\boxed{\gamma = 13}$. Ce sont bien des nombres réels et les calculs ci-dessus montrent que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \boxed{z^3 - (4-2i)z^2 + (13-8i)z + 26i = (z+2i)(z^2 - 4z + 13)} \tag{34}$$

4. Alors on est ramené à un produit nul, comme d'habitude avec les nombres réels :

$$(G) \iff z + 2i = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0 \tag{35}$$

On a donc notre solution $z = -2i$ ainsi que les solutions de $z^2 - 4z + 13 = 0$. Pour cette dernière on calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$ donc les solutions sont $z = \frac{4 \pm 6i}{2}$ soit $z = 2 \pm 3i$.
En conclusion l'équation (G) a exactement trois solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(G)} = \Big\{ -2i, 2+3i, 2-3i \Big\}} \tag{36}$$

Exercice d'informatique

1. Le maximum est a si $a \geqslant b$ et b sinon.
Que se passe-t-il s'ils sont égaux ? Alors on peut renvoyer soit l'un soit l'autre, peu importe puisqu'ils sont égaux... Il faut cependant bien que la fonction renvoie quelque chose dans le cas d'égalité.

```python
def maximum(a, b):
    if a >= b:
        return a
    else:
        return b
```

2. (a) `hein(0)` renvoie 0 : la boucle n'est pas du tout exécutée et à la fin n vaut 0.

   `hein(3)` renvoie 2 : la boucle est exécutée 2 fois (d'abord avec $n = 0$ puis avec $n = 1$) et à la fin $n = 2$.

   `hein(4)` renvoie 2 : idem, la boucle est exécutée 2 fois, car avant un troisième passage on teste la condition $4 < 4$ qui est fausse.

   `hein(10)` renvoie 4 : il y a un passage dans la boucle avec $n = 3$, puis n devient 4, puis la condition $16 < 9$ est fausse et donc il n'y a pas de nouveau passage, à la fin $n = 4$.

   (b) Il faut renvoyer $n-1$ à la fin et pas n car la fonction va « un cran trop loin » : dans son dernier passage elle teste la condition $n^2 < x$, si c'est vrai alors n est augmenté de 1, mais la partie entière de $\sqrt{x}$ est le *plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à* x donc c'est n et pas $n+1$ (donc retirer 1 à la fin). Ce $n+1$ est en fait le plus petit entier dont le carré est strictement supérieur à x. À cause de ce « inférieur ou égal », il faut que ce test soit une inégalité large $n^2 \leqslant x$: si on change seulement le n par $n-1$ la fonction ne renverra plus le bon résultat quand x est déjà un carré d'entier (`hein(4)` ci-dessus).

```python
def hein(x):
    n = 0
    while n*n <= x:
        n = n + 1
    return n - 1
```

3. Il s'agit d'un test de conditions en cascade, on part par exemple de la plus petite valeur et on remonte avec des `elif`. Le sujet ne précise pas ce qui se passe en cas d'égalité : on peut interpréter librement, il semble de bon sens de considérer que la farine très blanche a un taux $< 0{,}5$ et que la farine blanche démarre à $\geqslant 0{,}5$. Quand on travaille avec des valeurs qui sont des nombres réels issus de mesures physique, cela a de toute façon peu d'importance : une mesure d'exactement 0,5 % de taux de cendres n'existe pas.

```python
def farine(t):
    if t < 0.5:
        print("farine très blanche")
    elif t < 0.75:
        print("farine blanche")
    elif t < 0.9:
        print("farine bise")
    else:
        print("farine intégrale")
```

   La fin correspond automatiquement au cas $t \geqslant 0{,}9$: il n'existe pas de `else t >= 0.9` car `else` signifie « sinon », tout court.

4. On introduit une variable `u` qui représente les termes de la suite au fur et à mesure de la boucle, plus précisément `u` représente toujours bien le terme u_i en entrant dans la boucle, et u_{i+1} en sortant. Au départ c'est bien u_0, et dans le dernier passage $i = n-1$, à la fin c'est bien u_n.

```python
def suite(n):
    # u représente u(i) en début de boucle
    u = 2
    for i in range(n):
        u = (u**2 + 1) / (u + 5)
    return u
```

Problème

1. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1],\ \arccos(x) \text{ est l'unique } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = x}$

   Écrire cette phrase, en entier, qui sert de définition à la fonction arccos.

2. (a) On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{g'(x) = \frac{3x^2-3}{2} = \frac{3}{2}(x^2-1)} \tag{37}$$

Le signe est alors vite obtenu, les changements de signe sont en -1 et en 1, on calcule $g(-2) = -1$, $g(-1) = 1$, $g(1) = -1$ et $g(2) = 1$.

x	$-\infty$	-2	-1		1	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	-1	1		-1	1	$+\infty$

(38)

(b) La fonction f est définie si et seulement si $g(x)$ est entre -1 et 1, alors on peut lui appliquer arccos. Par la lecture du tableau de variations, c'est le cas si et seulement si $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{D}_f = [-2, 2]} \tag{39}$$

3. (a) *La question est traitable sans les nombres complexes, même si on ne peut pas interdire de les utiliser si le résultat final est correct.*

On écrit $\cos^3(\theta) = \cos(\theta) \times \cos^2(\theta)$. On remplace ensuite $\cos^2(\theta)$ par $\frac{1+2\cos(2\theta)}{2}$: c'est la formule de duplication pour cos, lue à l'envers pour linéariser. Ainsi :

$$\cos^3(\theta) = \cos(\theta) \times \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{\cos(\theta) + \cos(\theta)\cos(2\theta)}{2} \tag{40}$$

Surtout ne pas remplacer $\cos^2(\theta)$ *par* $1 - \sin^2(\theta)$ *: il restera alors des produits* $\cos(\theta) \times \sin^2(\theta)$ *de trois termes donc cela n'a pas fait diminuer le degré du produit. Il y a à chaque étape une seule bonne formule de linéarisation à utiliser pour enlever un produit.*

Puis on remplace $\cos(\theta)\cos(2\theta)$ en utilisant la formule

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a + b) + \cos(a - b)\Big) \tag{41}$$

C'est la formule de linéarisation obtenue en sommant $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$ (aussi égal à $\cos(b - a)$). On a alors

$$\cos(\theta)\cos(2\theta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(3\theta) + \cos(\theta)\Big) \tag{42}$$

On reporte alors :

$$\boxed{\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\Big(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\Big)} \tag{43}$$

(b) Analyse : pour tout $a \in \mathbb{R}$ alors par la formule ci-dessus

$$\begin{aligned}
\cos(3\arccos(ax)) &= 4\cos^3(\arccos(ax)) - 3\cos(\arccos(ax))\Big) && (44)\\
&= 4(ax)^3 - 3ax && (45)\\
&= 4a^3x^3 - 3ax && (46)
\end{aligned}$$

La formule $\cos(\arccos(x)) = x$ *est vraie sans contraintes sur* x *: par définition,* $\arccos(x)$ *est un angle dont le cosinus vaut* x.

On voit alors qu'il faut poser $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ (comme suggéré par les questions d'après) pour retrouver $\cos(3\arccos(x/2)) = g(x)$.

4. (a) On a alors $\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$. Sur ce domaine, les valeurs de arccos sont entre 0 et $\frac{\pi}{3}$. Multipliant par 3 alors

$$\boxed{0 \leqslant 3\arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \pi} \tag{47}$$

(b) On déduit des résulats précédents : d'une part $\cos(3\arccos(x/2)) = g(x)$, d'autre part on voit aussi que $\cos(3f(x)) = g(x)$. Ces deux quantités ont le même cos et sont toutes les deux dans $[0, \pi]$ donc elles sont égales : $3\arccos(x/2) = 3f(x)$. Cela signifie aussi

$$\boxed{f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{48}$$

5. Il est toujours vrai que $\cos(3f(x)) = g(x)$, et de plus

$$\cos(2\pi - 3) = \cos(-3\arccos(x/2)) = \cos(3\arccos(x/2)) = g(x) \tag{49}$$

Cette fois-ci, pour $x \in [-1, 1]$ alors $\frac{x}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Et sur ce domaine arccos est entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. On déduit alors $\pi \leqslant \arccos(x/2) \leqslant 2\pi$ d'où

$$0 \leqslant 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \pi \tag{50}$$

Encore une fois nous avons deux termes qui ont le même cos et qui sont tous les deux dans $[0, \pi]$, donc ils sont égaux. Ainsi

$$\boxed{f(x) = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{51}$$

6. Dans ce cas $\frac{x}{2} \in [-1, -\frac{1}{2}]$ et donc sur ce domaine arccos est entre $2\pi/3$ et π. Multipliant par 3 :

$$2\pi \leqslant \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 3\pi \tag{52}$$

Pour ramener cette expression dans $[0, \pi]$ tout en maintenant le même cos, il suffit de lui retirer 2π. Ainsi :

$$\boxed{f(x) = -2\pi + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{53}$$

Démonstration : ces deux termes ont le même cos et sont tous les deux dans $[0, \pi]$, donc sont égaux.
Si on a compris cette question, alors on a tout compris à la trigonométrie ! Pour tout $x \in [-1, 1]$, $2\pi - \arccos(x)$ est l'unique $\theta \in [\pi, 2\pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$; $-\arccos(x)$ est l'unique $\theta \in [-\pi, 0]$ tel que $\cos(\theta) = x$, et $-2\pi + \arccos(x)$ l'unique $\theta \in [2\pi, 3\pi]$; etc, on les obtient tous ainsi.

Problème 2

Faire un dessin : $d_A(x)$ est bien la plus courte distance entre le point x et un point de la partie A. Il s'agit donc d'identifier quel $a \in A$ est le plus proche de x.

1. (a) *Sur un dessin, le point le plus proche de x est 1 si $x \geqslant \frac{1}{2}$ et 0 si $x \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $d_A(x) = |x|$ si $x \geqslant \frac{1}{2}$ et $d_A(x) = |x - 1|$ si $x \leqslant \frac{1}{2}$. On peut aussi raisonner en résolvant l'inéquation $|x| \leqslant |x - 1|$.*

   - Cas $x \geqslant \frac{1}{2}$: alors $|x| = x \geqslant \frac{1}{2}$ d'une part, et ensuite, ou bien $-\frac{1}{2} \leqslant x - 1 \leqslant \frac{1}{2}$ donc $|x - 1|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$; ou bien $x - 1 \geqslant \frac{1}{2}$ et alors $|x - 1| = x - 1 \leqslant x = |x|$.
     Bref, le minimum des deux est $|x - 1|$.
   - Cas $x \leqslant \frac{1}{2}$: alors $x - 1 \leqslant 0$ donc $|x - 1| = 1 - x \geqslant \frac{1}{2}$ d'une part, et d'autre part, ou bien $x \geqslant 0$ donc $|x| = x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant |x - 1|$; ou bien $x \leqslant 0$ et $|x| = -x \leqslant 1 - x = |x - 1|$.
     Bref le plus petit des deux termes est $|x|$.

   En résumé :

$$\boxed{d_A(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2} \\ |x| & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}} \tag{54}$$

   (b) Directement : si $x \in A$ alors $x = 0$ ou $x = 1$ et l'un des deux termes entre $|x|$ et $|x - 1|$ est nul, donc est le minimum des deux. Réciproquement, si le minimum est nul alors l'un de ces deux termes est nul, ce qui signifie bien $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1}$.

2. (a) *Encore une fois sur un dessin, le point de A le plus proche de x est 0 si $x \leqslant 0$; 1 si $x \geqslant 1$; et x lui-même si $x \in A$.*

- Cas $0 \leqslant x < 1$: alors $x \in A$, donc $a = x$ réalise le mininum et $d_A(x) = 0$.
- Cas $x \leqslant 0$: alors pour tout élément $a \in A$, $|x-a| = a - x \geqslant -x$, et le minimum est atteint pour $a = 0$ auquel cas $-x$ est aussi égal à $|x|$.
- Cas $x \geqslant 1$: démontrons que c'est bien $x - 1$ la borne inférieure des $|x-a|$ parmi tous les $a \in A$. Comme $a \in A$, alors $a \leqslant 1$ et $x \geqslant 1$ donc $|x-1| = x - 1$ et $\forall a \in A$, $x - a \leqslant x - 1$.

  L'ensemble $\left\{|x-a| \;\middle|\; a \in A\right\}$ est donc bien minoré par $x-1$. Montrons que c'est le plus grand minorant. Soit un nombre réel $m > x-1$. Il faut montrer que m n'est pas un minorant, c'est-à-dire qu'il existe des éléments a de A tels que $x - a < m$, c'est-à-dire tels que $a > x - m$, sachant $x - m < 1$. Si on a choisi $m \geqslant x$ alors on peut toujours prendre $a = 0$ (l'important est ce qui se passe pour m un petit peu plus grand que $x-1$). Sinon, un tel élément existe bien, par exemple $a = \frac{1+(x-m)}{2}$ (le milieu entre 1 et $x-m$, avec $x - m \geqslant 0$, est bien dans A).

En résumé :

$$\boxed{d_A(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}} \tag{55}$$

(b) $\boxed{\text{Non}}$, la démonstration est en fait dans la question précédente : $\boxed{1 \notin A \text{ mais } d_A(1) = 0}$.

3. (a) Tout $x \in \mathbb{R}$ est entre deux nombres entiers : il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x \leqslant n+1$. Le plus proche des deux est à distance inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$, sinon on aurait $n + \frac{1}{2} < x$ et $x + \frac{1}{2} < n+1$ ce qui donnerait $n+1 < n+1$, c'est absurde ! Donc $\boxed{d_A(x) \leqslant \frac{1}{2}}$.

   (b) Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $d_A(x) = 0$.

   Réciproquement, supposons $d_A(x) = 0$. Le nombre x est entre deux entiers successifs n et $n+1$ comme-ci dessus. Si x n'est pas entier alors $x - n > 0$ et $n + 1 - x > 0$. Mais pour tout autre entier $m \in \mathbb{Z}$, alors $x - m \geqslant x - n$ (si $m \leqslant n$) et $m + 1 - x \geqslant n + 1 - x$ (si $m \geqslant n$). Bref, dans tous les cas, les $|m-x|$ sont minorées par le minimum entre $x - n$ et $n + 1 - x$ qui sont tous les deux strictement positifs : la borne inférieure ne peut pas être 0. Donc par contraposée on a montré que $\boxed{\text{si } d_A(x) = 0 \text{ alors } x \in \mathbb{Z}}$.

   (c) Encore une fois, la formule découle des questions précédéntes si elles ont bien été traitées. Les deux entiers successifs encadrant x sont $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$ (on n'a pas vraiment besoin de l'inégalité stricte $x < \lfloor x \rfloor + 1$) et la distance de x à $\mathbb{Z}$ est donc le minimum entre $x - \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1 - x$. Quand a-t-on $x - \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 - x$? C'est précisément équivalent à $x \leqslant \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ *(concrètement : la partie décimale de x est inférieure à 0,5)*. On a donc bien :

$$\boxed{d_A(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{2} \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{sinon} \end{cases}} \tag{56}$$

4. (a) On trouve :

$$\boxed{\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad \boxed{\overline{\varphi}^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \boxed{\varphi + \overline{\varphi} = 1} \quad \boxed{\varphi \times \overline{\varphi} = -1} \tag{57}$$

   (b) Il s'agit d'encadrer $\sqrt{5}$. Comme on va ensuite ajouter 1, mais surtout ensuite diviser par 2, il faut encadrer $\sqrt{5}$ dans un intervalle de longueur $\frac{1}{4}$, ce qui se fait en étudiant la partie entière de $4\sqrt{5}$. Cela signifie concrètement étudier la position de $\sqrt{5}$ par rapport aux entier plus 0,25 ; 0,5 ; 0,75.

   Alors avec les méthodes connues : $(4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$ et on sait $64 < 80 < 81$, d'où $8 < 4\sqrt{5} < 9$ puis

$$2 < \sqrt{5} < \frac{9}{4} \tag{58}$$

   Il s'ensuit alors

$$\boxed{\frac{12}{8} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{13}{8}} \quad \text{et} \quad \boxed{-\frac{5}{8} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{4}{8}} \tag{59}$$

   Concrètement, sachant $\frac{1}{8} = 0{,}125$, on a démontré $1{,}5 < \varphi < 1{,}625$ et $-0{,}625 < \overline{\varphi} < -0{,}5$, sans calculatrice !

(c) Récurrence double.

- Initialisation $n = 0$: $u_0 = 2$ et $\varphi^0 + \overline{\varphi}^0 = 1 + 1 = 2$.
- Initialisation $n = 1$: $u_1 = 1$ et $\varphi + \overline{\varphi} = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n = \varphi^n + \overline{\varphi}^n$ et $u_{n+1} = \varphi^{n+1} + \overline{\varphi}^{n+1}$. Calculons u_{n+2} :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n && (60)\\ &= (\varphi^{n+1} + \overline{\varphi}^{n+1}) + (\varphi^n + \overline{\varphi}^n) && (61)\\ &= \varphi^n(\varphi + 1) + \overline{\varphi}(\overline{\varphi}^n + 1) && (62) \end{aligned}$$

Mais à la question précédente on a vu qu'en fait φ^2 est égal à $\varphi + 1$ (on peut aussi revenir à l'expression avec la racine…) et de même $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \varphi^n \times \varphi^2 + \overline{\varphi}^n \times \overline{\varphi}^2 && (63)\\ &= \varphi^{n+2} + \overline{\varphi}^{n+2} && (64) \end{aligned}$$

Cela termine la récurrence.

Nous verrons dans le chapitre sur les suites que le fait que φ et $\overline{\varphi}$ sont les deux racines de l'équation $x^2 = x + 1$ implique automatiquement que φ^n, $\overline{\varphi}^n$, et même toute combinaison linéaire $A\varphi^n + B\overline{\varphi}^n$ ($(A, B) \in \mathbb{R}^2$) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Les suites géométriques vérifient cette relation si et seulement si leur raison vérifie l'équation de degré 2 associée.

(d) D'après nos encadrements, on sait déjà $-1 < \overline{\varphi} < 0$. On en déduit alors que pour tout $n \geqslant 1$ alors $|\overline{\varphi}^n| < 1$ (pour $n = 0$ alors $\overline{\varphi}^n = 1$) et de plus $\overline{\varphi}^n$ alterne de signe, positif si n est pair et négatif sinon. Un peu plus finement, on encadre directement

$$2 < \sqrt{5} < 3 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \overline{\varphi}^2 < \frac{1}{2} \tag{65}$$

et donc $|\overline{\varphi}^2| < \frac{1}{2}$. Comme on multiplie ensuite par des nombres de valeurs absolue strictement inférieure à 1 (les puissances seront, en valeur absolue, strictement décroissantes et convergeant vers 0) alors on aura bien

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{|\overline{\varphi}^n| < \frac{1}{2}} \tag{66}$$

On en déduit aisément la partie entière, pour un nombre strictement entre -1 et 1 et dont le signe alterne (le cas $n = 0$ est à traiter à part) :

$$\boxed{\lfloor \overline{\varphi}^n \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair et } n \geqslant 2 \end{cases}} \tag{67}$$

(e) On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n = u_n - \overline{\varphi}^n$ où u_n est déjà entier. Si on lui ajoute un terme strictement inférieur à 1 (cas n impair), alors la partie entière sera u_n, et si on retire un terme strictement inférieur à 1 (cas n pair et $n \geqslant 2$) la partie entière sera $u_n - 1$. Pour $n = 0$ alors on sait déjà $\varphi^0 = 1$. En résumé :

$$\boxed{\lfloor \overline{\varphi}^n \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ u_n & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n - 1 & \text{si } n \text{ est pair et } n \geqslant 2 \end{cases}} \tag{68}$$

(f) Comme conséquence des questions précédentes :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{d_{\mathbb{Z}}(\varphi)^n = |\overline{\varphi}^n|} \tag{69}$$

et ceci tend vers 0 pour $n \to +\infty$ car $|\varphi| < 1$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} d_{\mathbb{Z}}(\varphi^n) = 0} \tag{70}$$

Contrètement, φ^n *est la somme d'un entier et d'un terme tendant vers* 0 *pour* $n \to +\infty$*. Ce résultat signifie que quand on calcule les puissances de* φ *de plus en plus grandes, les résultats sont de plus en plus grands mais aussi de plus en plus proches d'être des nombres entiers. On trouve par exemple* $\varphi^{10} \approx 122{,}991$, $\varphi^{11} \approx 199{,}005$, $\varphi^{12} \approx 321{,}997$, $\varphi^{13} \approx 521{,}002$. *Ce phénomène ne s'explique pas simplement à partir de la formule définissant* φ *tout seul : il est nécessaire de considérer* $\overline{\varphi}$ *et la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit l'inégalité qui définit la partie entière de nx :

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \tag{71}$$

puis on divise par n :

$$\boxed{\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} \tag{72}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La question revient à démontrer que pour tout $m > 0$, il existe un nombre rationnal $a \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - a| < m$.

L'inégalité ci-dessus aide à produire le nombre rationnel $a = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, qui vérifiera bien $|x - a| < m$ si on peut choisir n tel que $\frac{1}{n} < m$, c'est-à-dire que n est un entier plus grand strictement que $\frac{1}{m}$. Par exemple $n = \lfloor \frac{1}{m} \rfloor + 1$.

Conclusion : on pose

$$\boxed{n = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor + 1} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} \tag{73}$$

Alors $a \in \mathbb{Q}$ est tel que $|x - a| < m$. Donc m n'est pas un minorant de la distance de x à $\mathbb{Q}$, et cela pour tout $m > 0$.

Cela démontre donc $\boxed{d_A(x) = 0}$.