DS 1 Mathématiques

Les exercices et problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Dans les exercices, les questions sont indépendantes. Dans les problèmes par contre, même s'il est toujours possible de sauter une question, il est nécessaire de prêter attention à la progression logique et à la dépendance entre questions. Il est conseillé de prendre son temps pour comprendre la structure globale du problème. Le but n'est pas de tout faire ***mais de le faire bien****.*

Exercice 1

Donner toutes les solutions des équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(E_1) $\quad 8e^x + 3e^{2x} = 3$

(E_2) $\quad \dfrac{2x^2+7x+1}{3x+2} > 2$

(E_3) $\quad |x^2 - 4x + 3| = x - 1$

$(E_4)_m$ $\quad m(m-3)x^2 + 4x + 1 = 0$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$)

Exercice 2

Soient les ensembles

$$E = \Big\{(2-t, 4+2t, 3t+1) \;\Big|\; t \in \mathbb{R}\}$$
$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; 2x + y = 8\Big\}$$

A-t-on $E \subset F$? Et $F \subset E$?

Problème 1

Dans ce problème on travaille uniquement avec des parties de $\mathbb{N}$. Pour deux telles parties A et B, on note $A \lhd B$ l'assertion suivante :

$$\forall x \in A \ \Big(x \in B \text{ et } \forall y \in B \ (y \notin A \Rightarrow x < y)\Big)$$

1. Écrire la négation de $A \lhd B$.
2. Soient $A_1 = \{3,4,5\}$ et $A_2 = \{3,4,5,6,7,8\}$. A-t-on $A_1 \lhd A_2$? Et $A_2 \lhd A_1$?
3. Trouver deux parties B_1 et B_2 telles qu'on ait $B_1 \subset B_2$ mais pas $B_1 \lhd B_2$.
4. Lister toutes les parties A telles que $A \lhd \{3,4,5,6\}$.
5. Lister toutes les parties A de $\mathbb{N}$, formées de nombres inférieurs ou égaux à 9, telles que $\{2,4,6\} \lhd A$.
6. (a) Soit $I = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres entiers naturels impairs. A-t-on $I \lhd \mathbb{N}$? Et $\mathbb{N} \lhd I$?
   (b) Justifier que la seule partie A de $\mathbb{N}$ telle que $I \lhd A$ est $A = I$.
7. Justifier que pour toutes parties A et B, si $A \lhd B$ et $B \lhd A$ alors $A = B$.
8. (a) Démontrer que pour toutes parties A, B, C de $\mathbb{N}$: $\Big(A \lhd B \text{ et } B \lhd C\Big) \Longrightarrow A \lhd C$.
   (b) Comment s'appelle cette propriété de la relation $\lhd$?
9. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non-vide. Démontrer que $A \lhd \mathbb{N}$ si et seulement si, ou bien $A = \mathbb{N}$, ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Exercice 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3(2u_{n+1} - 3u_n)$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (an+b)c^n$$

Problème 2

On définit une nouvelle opération en posant, pour deux nombres réels x et y dans l'intervalle $I =]-1, 1[$:

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. (a) Justifier que $x \oplus y$ est bien défini, pour tous x et y dans I.
   (b) Démontrer que si $x \in I$ et $y \in I$ alors $x \oplus y < 1$.
   Indication : remarquer que $1 + xy - x - y = (1-x)(1-y)$.
   (c) En déduire que pour tous $(x, y) \in I^2$ alors $x \oplus y \in I$.
2. (a) L'opération $\oplus$ est-elle commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Qu'est-ce que $x \oplus -x$?
   (b) i. Démontrer : $\forall (x, y, z) \in I^3$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
   On notera alors $x \oplus y \oplus z$ cette quantité.
   ii. Comment s'appelle cette propriété de $\oplus$?
3. Soient les fonctions
$$f : x \longmapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
   (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in I$.
   (b) Démontrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$.
   (c) Vérifier que $g(x)$ est défini si et seulement si $x \in I$.
   (d) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$ et $\forall x \in I$, $f(g(x)) = x$.
   (e) En déduire : $\forall (x, y) \in I^2$, $x \oplus y = f(g(x) + g(y))$.
4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (a) Justifier brièvement $\forall n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 2$.
   (b) Démontrer : $\forall k \geqslant 1$, $u_{k-1}u_{k+1} - u_k^2 = (-1)^k$.
   (c) En déduire : $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{u_{2n}} = \dfrac{1}{u_{2n-1}} \oplus \dfrac{-1}{u_{2n+1}}$.
   (d) En déduire, pour $n \geqslant 2$, une expression simplifiée de $\dfrac{1}{u_4} \oplus \dfrac{1}{u_6} \oplus \cdots \oplus \dfrac{1}{u_{2n}}$.