DS 1 Mathématiques
Correction

Exercice 1

- (E_1) Posons $y = e^x$. Résoudre (E_1) est équivalent à résoudre

$$(E_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = e^x \\ 8y + 3y^2 = 3 \end{cases} \tag{1}$$

Cette dernière équation se ré-écrit $3y^2 + 8y - 3 = 0$. On calcule alors $\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 64 + 36 = 100 = 10^2$. Les deux solutions sont $y = \frac{-8 \pm 10}{2 \times 3}$ soit $y_1 = \frac{1}{3}$ et $y_2 = -3$.
On doit alors résoudre $e^x = y_1$ soit $x = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3)$, et $e^x = y_2$ qui n'a pas de solution car $y_2 < 0$. En conclusion, l'unique solution est

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \Big\{ -\ln(3) \Big\}} \tag{2}$$

- (E_2) L'erreur à ne pas faire est de multiplier des deux côtés par $3x + 2$, dont on ne connait pas le signe...
Tout d'abord l'expression est définie si et seulement si $3x + 2 \neq 0$ soit $x \neq -\frac{2}{3}$. On pose $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$.
Alors pour $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
(E_2) &\Longleftrightarrow \frac{2x^2 + 7x + 1}{3x + 2} - 2 > 0 && (3)\\
&\Longleftrightarrow \frac{(2x^2 + 7x + 1) - 2(3x + 2)}{3x + 2} > 0 && (4)\\
&\Longleftrightarrow \frac{2x^2 + 7x + 1 - 6x - 4)}{3x + 2} > 0 && (5)\\
&\Longleftrightarrow \frac{2x^2 + x - 3}{3x + 2} > 0 && (6)
\end{aligned}$$

On doit alors tracer le tableau de signe de cette expression. Pour le numérateur, $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 = 5^2$ et donc les racines sont $x = \frac{-1 \pm 5}{2 \times 2}$ soit $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$. Le dénominateur change de signe en $-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x^2+x-3}{3x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(7)

Par lecture du tableau de signe, on répond directement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \Big] -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\Big[\cup \Big] 1, +\infty\Big[} \tag{8}$$

- (E_3) Il faut raisonner par disjonction de cas en cherchant d'abord le signe de l'expression **sous** la valeur absolue. C'est $x^4 - 4x + 3$, avec $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2$, les deux racines sont $x = \frac{4 \pm 2}{2}$ soit $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$, avec le signe bien connu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

(9)

- Cas $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$: alors $|x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$ est l'équation à résoudre est

$$(E_3) \iff x^2 - 4x + 3 = x - 1 \tag{10}$$
$$\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \tag{11}$$

  On trouve une équation de degré 2, cette fois avec $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$ et ayant deux racines $x = \frac{5 \pm 3}{2}$ soit 1 et 4. Ces deux racines sont bien dans l'intervalle que l'on est en train de considérer.
- Cas $x \in [1, 3]$: alors $|x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3)$ est l'équation à résoudre est équivalente à

$$(E_3) \iff -x^2 + 4x - 3 = x - 1 \tag{12}$$
$$\iff 0 = x^2 - 3x + 2 \tag{13}$$

  On trouve maintenant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$, et deux racines $x = \frac{3 \pm 1}{2}$ soit 1 (qu'on a déjà trouvé) et 2 (qui est bien dans l'intervalle considéré).

En conclusion

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{1, 2, 4\right\}} \tag{14}$$

- $(E_4)_m$ On doit distinguer les cas selon $m \in \mathbb{R}$.
  - Cas $m = 0$ ou $m = 3$: alors le coefficient devant x^2 est nul donc (E_4) **n'est pas** une équation du second degré (il n'y a pas de sens à écrire Δ). Dans chacun de ces deux cas, l'équation est équivalente à $4x + 1 = 0$ soit $x = -\frac{1}{4}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)_m} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}}, \qquad m \neq 0, 3 \tag{15}$$

  - Sinon : alors c'est bien une équation du second degré dont on calcule

$$\Delta = 4^2 - 4 \times m(m-3) \times 1 \tag{16}$$
$$= 16 - 4m^2 + 12m \tag{17}$$
$$= -4(m^2 - 3m - 4) \tag{18}$$

    on a alors besoin du signe de cette expression… encore avec un discriminant (qu'on n'appelle pas de la même façon) : $\Delta' = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$, donc les racines sont $m = \frac{3 \pm 5}{2}$ soit $m_1 = -1$ et $m_2 = 4$. Le signe varie selon m :

m	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

(19)

    - Cas $m \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$: alors $\Delta < 0$ donc $(E_4)_m$ n'admet pas de solution :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)_m} = \emptyset}, \qquad m \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[\tag{20}$$

    - Cas $m = -1$ ou $m = 4$: alors $\Delta = 0$ et (E_4) a une unique solution $x = \frac{-4}{2m(m-3)}$. Plus précisément, en remplaçant directement m par sa valeur, on trouve

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)_{m=-1}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}} \qquad \boxed{\mathcal{S}_{(E_4)_{m=4}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}} \tag{21}$$

    - Cas $-1 < m < 4$, c'est-à-dire $m \in]-1, 0[\cup]0, 3[\cup]3, 4[$: alors (E_4) a deux solutions

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4(m^2 - 3m - 4)}}{2m(m-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-(m^2 - 3m - 4)}}{m(m-3)} \tag{22}$$

      ainsi dans ce cas

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)_m} = \left\{\frac{-2 - \sqrt{-m^2 + 3m + 4)}}{m(m-3)}, \frac{-2 + \sqrt{-m^2 + 3m + 4)}}{m(m-3)}\right\}}, \qquad m \in]-1, 0[\cup]0, 3[\cup]3, 4[\tag{23}$$

Exercice 2

- Démontrons d'abord $E \subset F$. Soit un élément $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pour lequel il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2-t$, $y = 4+2t$, $z = 3t+1$. On calcule alors

$$2x + y = 2(2-t) + (4+2t) = 4 - 2t + 4 + 2t = 8 \tag{24}$$

  et ceci démontre que $\boxed{(x,y,z) \in F}$, valable pour tout $(x,y,z) \in E$. Donc $\boxed{E \subset F}$.

- Étudions maintenant l'inclusion $F \subset E$. Soit un élément $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose uniquement $2x+y=8$. Existe-t-il un $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = 2-t & (L_1) \\ y = 4+2t & (L_2) \\ z = 3t+1 & (L_3) \end{cases} \qquad ? \tag{25}$$

  Alors L_1 impose de prendre $t = 2-x$.
  Puis L_2 impose de prendre $t = \frac{y-4}{2}$. Est-ce le même qu'avec L_1 ? Oui si et seulement si $\frac{y-4}{2} = 2-x$ c'est-à-dire $2x+y=8$: c'est bien le cas par hypothèse.
  Mais L_3 impose de prendre $t = \frac{z-1}{3}$. Est-ce le même qu'avec L_1 ? Oui si et seulement si $\frac{z-1}{3} = 2-x$ c'est-à-dire $3x+z=3$.
  Mais cette dernière condition n'est pas automatiquement vraie d'après notre hypothèse, autrement dit si on choisit (x,y,z) tel que $2x+y=8$ est vérifié mais pas $3x+z=3$ alors (x,y,z) n'appartiendra pas à F. C'est le cas par exemple (nombreux exemples possibles : on peut commencer par imposer $y=0$, puis déterminer x tel que $2y+y=8$, puis déterminer z telles qu'on n'ait pas $3x+z=3$, une seule valeur de z étant à exclure) de $x=4$, $y=0$, $z=0$.
  En conclusion $\boxed{\exists (x,y,z) \in F \text{ tel que } (x,y,z) \notin E}$ et donc $\boxed{F \text{ n'est pas inclus dans } E}$.

Problème 1

Remarque 1. La relation $A \lhd B$ signifie, d'une part que A est inclus dans B, mais d'autre part que les éléments qui sont dans B et pas dans A sont plus grands que tous les éléments de A.

1. Très formellement :

$$\boxed{\text{non}(A \lhd B) \equiv \exists x \in A \ \Big(x \notin B \text{ ou } \exists y \in B\ (y \notin A \text{ et } x \geqslant y)\Big)} \tag{26}$$

   En français : soit il y a un élément de A qui n'est pas dans B (alors A n'est pas inclus dans B), soit il y a un élément x de A et un élément y de B mais pas dans A avec $y \leqslant x$ (ce y n'est pas plus grand que tous les éléments de A). Comme $x \in A$ et $y \notin A$ alors l'inégalité $x \geqslant y$ peut être remplacée par $x > y$.

2. On a $\boxed{A_1 \lhd A_2}$: si $x \in A_1$ alors d'une part $x \in A_2$, et un élément de y de A_2 qui n'est pas dans A_1 est parmi $\{6,7,8\}$ donc est plus grand que x.
   On n'a pas $\boxed{A_2 \lhd A_1}$, car par exemple l'élément $x=6$ est dans A_2 mais n'est pas dans A_1.

3. On peut par exemple prendre $\boxed{B_1 = \{3,4,5\} \text{ et } B_2 = \{2,3,4,5\}}$: alors $B_1 \subset B_2$ est vrai, mais l'élément $y=2$ de B_2 n'est pas plus grand que tous les éléments de B_1.

4. Une telle partie est nécessairement incluse dans $\{3,4,5,6\}$, on a $\{3,4,5,6\}$ tout entier. On peut prendre $\{3,4,5\}$. Mais on ne peut pas enlever un autre élément, par exemple $\{3,4,6\} \lhd \{3,4,5,6\}$ n'est pas vrai ($y=5$ n'est pas plus grand que tous les éléments de A). On peut aussi enlever 5 et 6 pour former $\{3,4\}$, et aussi enlever 4 pour formel $\{3\}$. Enfin, il y a la partie vide. En conclusion, l'ensemble des parties possible est :

$$\boxed{\Big\{\{3,4,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4\}, \{3\}, \emptyset\Big\}} \tag{27}$$

5. On a bien sûr $A = \{2, 4, 6\}$ tout entier. Il faut lui ajouter des éléments inférieurs ou égaux à 9. Mais on ne peut pas rajouter par exemple 5 (il ne sera pas plus grand que tous les éléments de A) ni bien sûr 1. En fait, on obtient la réunion de A avec toutes les parties possibles de l'ensemble à trois éléments $\{7, 8, 9\}$:

$$\boxed{\Big\{\{2,4,6\},\{2,4,6,7\},\{2,4,6,8\},\{2,4,6,9\},\ \{\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\},\{2,4,6,7,9\},\{2,4,6,8,9\},\{2,4,6,7,8,9\}\Big\}} \tag{28}$$

6. - D'abord $\boxed{I \lhd \mathbb{N} \text{ n'est pas vrai}}$, il suffit de prendre $x = 3$ et $y = 2$ qui vérifient bien $x \in I$, $y \in \mathbb{N}$, $y \notin I$ et $y < x$.
   D'autre part $\boxed{\mathbb{N} \lhd I \text{ n'est pas vrai}}$ car on n'a même pas $\mathbb{N} \subset I$.
   - D'abord $I \lhd I$ est bien évidemment vrai.
   Soit donc A une partie de $\mathbb{N}$ telle que $I \lhd A$. Démontrons $A = I$, par double inclusion. Comme $I \subset A$ est déjà automatique, montrons $A \subset I$. On peut faire un raisonnement par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas : il existe $y \in A$ tel que $y \notin I$. Ce y est donc un entier pair, on pose $y = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Mais alors on peut poser $x = y + 1 = 2n + 1$ qui est bien dans I et tel que $y < x$, ce qui est contradictoire avec $I \lhd A$! C'est donc que $\boxed{A = I}$.
7. L'assertion $A \lhd B$ implique $A \subset B$... Si $A \lhd B$ et $B \lhd A$ alors $A \subset B$ et $B \subset A$ donc (anti-symétrie pour $\subset$) $\boxed{A = B}$.
   Autrement dit la relation $\lhd$ est $\boxed{\text{anti-symétrique}}$.
8. (a) Soient A, B, C des parties de $\mathbb{N}$. Supposons $A \lhd B$ et $B \lhd C$. Démontrons $A \lhd C$.
   Soit $x \in A$. Alors de $A \lhd B$ on déduit $x \in B$, puis de $B \lhd C$ on déduit $x \in C$. C'est la première partie de l'assertion $A \lhd C$.
   Puis, soit $y \in C$, on suppose $y \notin A$, il faut montrer $x < y$. On a en fait deux cas :
      - Si $y \in B$: alors $x \in A$, $y \in B$, $y \notin A$, donc de $A \lhd B$ on déduit $x < y$.
      - Si $y \notin B$: sachant $x \in A$ alors $x \in B$, et $y \in C$, $y \notin B$, donc de $B \lhd C$ on déduit $x < y$.

   Dans tous les cas $x < y$.
   Ceci démontre $\boxed{A \lhd C}$.
   (b) La relation $\lhd$ est $\boxed{\text{transitive}}$.
9. *Remarque : il manque le cas* $A = \emptyset$*, qui vérifie bien* $A \lhd \mathbb{N}$*. On supposera donc* $A \neq \emptyset$*.*
   Démontrons soigneusement par double implication.
   - $\Longleftarrow$ (réciproque, plus facile) On suppose $A = \mathbb{N}$ ou $A = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Dans le premier cas $A \lhd \mathbb{N}$ (il n'y a pas d'élément y tel que $y \in \mathbb{N}$ mais $y \notin A$). Dans le deuxième cas, alors pour tout $x \in A$, on a déjà bien $x \in \mathbb{N}$, et pour $y \in \mathbb{N}$ tel que $y \notin A$ alors $y > n$, or $x \leqslant n$, donc $x < y$. Ceci démontre $\boxed{A \lhd \mathbb{N}}$.
   - $\Longrightarrow$ (sens direct) On suppose $A \lhd \mathbb{N}$. Si $A = \mathbb{N}$ alors il n'y a rien à faire, on suppose donc $A \neq \mathbb{N}$: il existe un élément $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \notin A$. À cause de $A \lhd \mathbb{N}$ alors $\forall x \in A,\ x < m$. Cela signifie que la partie A est majorée. On la suppose aussi non-vide. On sait alors qu'elle admet un maximum : on pose $\boxed{n = \mathrm{Max}(A)}$.
   Démontrons alors que A est bien égal à $\{0, 1, 2, \dots, n\}$:
      - L'inclusion $\subset$ est la définition du maximum.
      - Inclusion $\supset$: soit $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, supposons par l'absurde que $x \notin A$.
         - Si $x < n$, alors la définition de $A \lhd \mathbb{N}$ donne une contradiction (ce x est dans $\mathbb{N}$ et pas dans A et n'est pas plus grand que tous les éléments de A).
         - Si $x = n$: cela est contradictoire avec la définition de maximum, qui doit appartenir à A.

      En conclusion on a bien dans tous les cas $\boxed{A \supset \{0, 1, 2, \dots, n\}}$.

Remarque 2. La relation binaire $\lhd$ vérifie la réflexivité $A \lhd A$, l'anti-symétrie, et la transitivité, tout comme $\subset$ sur les ensembles et $\leqslant$ sur les nombres réels. On l'appelle une *relation d'ordre*.

Exercice 3

Raisonnement par analyse-synthèse pour déterminer d'abord (a, b, c), puis démontrer que le résultat convient par récurrence.

- Analyse : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (an+b)c^n$. Si de tels nombres existent, alors pour $n = 0$ on a directement $0 = b \times 1$ donc $b = 0$.

  Avec $n = 1$, on doit avoir $6 = a \times c$. Cela ne permet certainement pas de déterminer uniquement a et c...

  À la main on calcule $u_2 = 3(2 \times 6 - 3 \times 0) = 36$. Et avec $n = 2$ on obtient la relation $36 = 2 \times a \times c^2$ soit $18 = ac^2$.

  Avec les deux relations précédentes, on détermine $c = \frac{ac^2}{ac} = \frac{18}{6} = 3$ (sauf si $a = 0$, auquel cas on aurait la suite nulle, mais ce n'est pas le cas ici...) puis $a = \frac{6}{c} = 2$.

  Nous avons bien déterminé (a, b, c) qui vérifie la condition demandée pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Ceci ne signifie pas qu'elle est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Synthèse : $\boxed{\text{on pose } a = 2,\ b = 0,\ c = 3}$. Démontrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n = 2n \times 3^n \text{ »} \tag{29}$$

  - Initialisation $n = 0$: c'est $0 = 0$, vrai.
  - Initialisation $n = 1$: c'est $6 = 2 \times 3$, vrai.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 3(2u_{n+1} - 3u_n) && \text{(définition de } u_{n+2}) && (30)\\
&= 3(2 \times 2(n+1) \times 3^{n+1} - 3 \times 2n \times 3^n) && \text{(utilisation de } \mathcal{P}(n+1) \text{ et de } \mathcal{P}(n)) && (31)\\
&= 3 \times 3^n(4(n+1) \times 3 - 6n) && && (32)\\
&= 3^{n+1}(12n + 12 - 6n) && && (33)\\
&= 3^{n+1}(6n + 12) && && (34)\\
&= 3 \times 3^{n+1}(2n+4) = \boxed{2(n+2) \times 3^{n+2}} && && (35)
\end{aligned}$$

    et on est arrivé à démontrer $\boxed{\mathcal{P}(n+2)}$.

  Conclusion : par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ceci termine la partie synthèse.

Problème 2

1. (a) Il s'agit de vérifier que pour $(x, y) \in I^2$ alors $1 + xy \neq 0$. Or, sachant $-1 < x < 1$ et $-1 < x < 1$ on déduit $-1 < xy < 1$ (il faut le rédiger soit en distinguant les cas, soit avec la multiplicativité de la valeur absolue) et donc en fait $\boxed{1 + xy > 0}$.

   (b) Supposons $x \in I$ et $y \in I$. L'inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned}
x \oplus y < 1 &\iff \frac{x+y}{1+xy} < 1 && (36)\\
&\iff x + y < 1 + xy && (37)\\
&\iff 0 < 1 + xy - x - y && (38)\\
&\iff 0 < (1-x)(1-y) && (39)
\end{aligned}$$

   (on peut multiplier des deux côtés par $1 + xy$ à conditions d'avoir répondu correctement à la première question). Or par nos hypothèses $1 - x > 0$, $1 - y > 0$, et donc $(1-x)(1-y) > 0$. Cela signifie donc bien que $\boxed{x \oplus y < 1}$.

   (c) On peut refaire le même raisonnement pour vérifier $\boxed{-1 < x \oplus y}$, qui est cette fois équivalent à $0 < 1 + xy + x + y$, cette dernière expression se factorisant en $(1+x)(1+y)$ et là encore par notre hypothèse c'est un produit de deux termes strictement positif.

   On peut aussi remarquer la symétrie : $x \in I \Leftrightarrow -x \in I$, de même pour y, et $-(x \oplus y) = (-x) \oplus (-y)$.

   En conclusion : $\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x \oplus y \in I}$. Ainsi $\oplus$ est bien une « opération » sur les éléments de I, on dit *loi de composition interne*.

2. (a)
   - L'opération $\oplus$ vérifie bien $\boxed{x \oplus y = y \oplus x}$ donc elle est commutative.
   - Pour tout $x \in I$, alors $\boxed{x \oplus 0 = 0 \oplus x = x}$ donc 0 est un élément neutre pour $\oplus$ (il joue le même rôle que 1 pour $\times$).
   - Pour tout $x \in I$ alors $\boxed{x \oplus -x = -x \oplus x = 0}$, autrement dit $-x$ est un inverse de x pour l'opération $\oplus$ (il joue le même rôle que $\frac{1}{x}$ pour $\times$).

   (b) i. *Petite erreur dans le sujet c'est bien* $(x, y, z) \in I^3$ *et pas* $\mathbb{R}^3$.
   Soit $(x, y, z) \in I^3$. Calculons : d'une part

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= \frac{x+y}{1+xy} \oplus z && (40)\\
&= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \times z} && (41)\\
&= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + \frac{z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy}{1+xy} + \frac{z(x+y)}{1+xy}} && (42)\\
&= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} && (43)
\end{aligned}
$$

   Mais d'autre part, de même :

$$
\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus \frac{y+z}{1+yz} && (44)\\
&= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \times \frac{y+z}{1+yz}} && (45)\\
&= \frac{\frac{x(1+yz)}{1+yz} + \frac{y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz}{1+yz} + \frac{x(y+z)}{1+yz}} && (46)\\
&= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} && (47)
\end{aligned}
$$

   On arrive à la même expression donc $\boxed{(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)}$.

   ii. L'opération $\oplus$ est $\boxed{\text{associative}}$. Il existe une formule bien symétrique pour le $\oplus$ de trois éléments de I.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a déjà $e^{2x} + 1 > 0$. Donc la condition $f(x) < 1$ est équivalente à $e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$ soit $-1 < 1$, ce qui est bien sûr vrai.
   De l'autre côté, la condition $-1 < f(x)$ est équivalente à $-(e^{2x} + 1) < e^{2x} - 1$ soit $0 < e^{2x} + e^{2x}$, ce qui est tout aussi vrai (deux termes strictement positifs).
   En conclusion on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in I}$.

   (b) C'est un calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, d'abord $f(x)$ et $f(y)$ sont bien dans I donc on peut leur appliquer $\oplus$, et d'une part

$$
f(x+y) = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{e^{2(x+y)} + 1} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1} \qquad (48)
$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
f(x) \oplus f(y) &= \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1 + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \times \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}} && (49)\\
&= \frac{\frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}}{\frac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}} && (50)\\
&= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)} && (51)\\
&= \frac{e^{2x} \times e^{2y} + e^{2x} - e^{2y} - 1 + e^{2x} \times e^{2y} - e^{2x} + e^{2y} - 1}{e^{2x} \times e^{2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1 + e^{2x} \times e^{2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1} && (52)\\
&= \frac{2e^{2x+2y}-2}{2e^{2x+2y}+2} = \frac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1} && (53)
\end{aligned}$$

On retrouve bien la même expression, donc $\boxed{f(x) \oplus f(y) = f(x+y)}$.

(c) L'expression $g(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$, il s'agit donc de tracer le tableau de signe de cette expression.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

(54)

On lit bien : $\boxed{g(x) \text{ est défini si et seulement si } -1 < x < 1.}$

(d) Calcul. Remarquez que tout est bien défini. Pour tout $x \in I$:

$$f(g(x)) = \frac{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}-1}{e^{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = \frac{\frac{2x}{1-x}}{\frac{2}{1-x}} = \frac{2x}{2} = \boxed{x = f(g(x))} \tag{55}$$

et de même, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right) = \frac{1}{2} \times 2x = x = \boxed{g(f(x))} \tag{56}$$

(e) Pour tout $(x,y) \in I^2$:

$$\boxed{x \oplus y = f(g(x)) \oplus f(g(y)) = f(g(x)+g(y))} \tag{57}$$

4. (a) On calcule $u_2 = 1$, $u_3 = 2$. La suite est positive (cela peut se démontrer par récurrence double, mais c'est aussi évident car on ne fait qu'additionner des termes positifs) et donc aussi croissante. Les termes ne peuvent qu'augmenter. Ainsi pour $n \geqslant 3$ alors $\boxed{u_n \geqslant 2}$.

Remarque : l'intérêt de cette question est qu'ainsi, les termes $\frac{1}{u_n}$ sont inférieurs à $\frac{1}{2}$, et donc sont bien dans I, pour $n \geqslant 3$. On peut donc leur appliquer l'opération $\oplus$.

(b) Démontrons ce résultat par récurrence (simple !). On note, pour $k \geqslant 1$, $\mathcal{P}(k)$ l'hypothèse de récurrence $u_{k-1}u_{k+1} - u_k^2 = (-1)^k$.
Pour $k = 1$: il s'agit de $0 \times 1 - 1^2 = -1$ ce qui est bien vrai.
Soit maintenant $k \geqslant 1$, supposons $\mathcal{P}(k)$. On doit alors calculer $u_k u_{k+2} - u_{k+1}^2$. Par définition on peut remplacer u_k par $u_{k+1} - u_{k-1}$ et u_{k+2} par $u_{k+1} + u_k$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
u_k u_{k+2} - u_{k+1}^2 &= (u_{k+1} - u_{k-1}) \times (u_{k+1} + u_k) - u_{k+1}^2 && (58)\\
&= u_{k+1}^2 - u_{k-1}u_{k+1} + u_{k+1}u_k - u_{k-1}u_k - u_{k+1}^2 && (59)\\
&= -u_{k-1}u_{k+1} + u_{k+1}u_k - u_{k-1}u_k && (60)
\end{aligned}$$

Le premier terme se remplace alors par $\mathcal{P}(k)$:

$$\begin{aligned} -u_{k-1}u_{k+1} + u_{k+1}u_k - u_{k-1}u_k &= -((-1)^k + u_k^2) + u_{k+1}u_k - u_{k-1}u_k && (61)\\ &= -(-1)^k + u_k(\underbrace{u_{k+1} - u_k - u_{k-1}}_{0}) && (62)\\ &= (-1)^{k+1} && (63)\end{aligned}$$

et ceci démontre $\mathcal{P}(k+1)$.

En conclusion $\mathcal{P}(k)$ est vraie, pour tout $k \geqslant 1$.

(c) Pour $n \geqslant 2$ alors tous les termes présents sont des u_k pour $k \geqslant 3$ donc leur inverse est bien dans I. On calcule :

$$\frac{1}{u_{2n-1}} \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}} = \frac{\frac{1}{u_{2n-1}} - \frac{1}{u_{2n+1}}}{1 - \frac{1}{u_{2n-1}} \times \frac{1}{u_{2n+1}}} = \frac{u_{2n+1} - u_{2n-1}}{u_{2n+1}u_{2n-1} - 1} \tag{64}$$

Par définition $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$ donc le numérateur est égal à u_{2n}. Par la question précédente (k pair) $u_{2n-1}u_{2n+1} - u_n^2 = 1$ donc le dénominateur est égal à u_{2n}^2. Il reste donc

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n}^2} = \boxed{\frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{u_{2n-1}} \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}}} \tag{65}$$

(d) Ré-écrivons un petit peu plus de termes :

$$\frac{1}{u_4} \oplus \frac{1}{u_6} \oplus \frac{1}{u_8} \oplus \cdots \oplus \frac{1}{u_{2n-2}} \oplus \frac{1}{u_{2n}} \tag{66}$$

Par la question précédente, c'est aussi

$$\left(\frac{1}{u_3} \oplus \frac{-1}{u_5}\right) \oplus \left(\frac{1}{u_5} \oplus \frac{-1}{u_7}\right) \oplus \left(\frac{1}{u_7} \oplus \frac{-1}{u_9}\right) \oplus \cdots \oplus \left(\frac{1}{u_{2n-3}} \oplus \frac{-1}{u_{2n-1}}\right) \oplus \left(\frac{1}{u_{2n-1}} \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}}\right) \tag{67}$$

Par la propriété d'associativité, on peut enlever les parenthèses et regrouper les termes différemment :

$$\frac{1}{u_3} \oplus \left(\frac{-1}{u_5} \oplus \frac{1}{u_5}\right) \oplus \left(\frac{-1}{u_7} \oplus \frac{1}{u_7}\right) \oplus \cdots \oplus \left(\frac{-1}{u_{2n-1}} \oplus \frac{1}{u_{2n-1}}\right) \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}} \tag{68}$$

Mais tous les termes $x \oplus -x$ donnent 0, on peut donc les enlever :

$$\frac{1}{u_3} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}} \tag{69}$$

À cause de la propriété d'élément neutre $x \oplus 0 = x$, on peut même complètement les retirer de la somme et il reste uniquement

$$\frac{1}{u_3} \oplus \frac{-1}{u_{2n+1}} \tag{70}$$

avec $u_3 = 2$. En conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{u_4} \oplus \frac{1}{u_6} \oplus \cdots \oplus \frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{u_{2n+1}}} \tag{71}$$