

DM 6 Mathématiques correction

Problème 1

- 1 1.a • « f est majorée sur $[a, b]$ » : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], f(x) \leq M$.
• Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) > M$.

1.b C'est un raisonnement par **contraposée**. Supposons que f soit majorée, disons par un $M_1 \in \mathbb{R}$, sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, et que f soit majorée par un $M_2 \in \mathbb{R}$ sur $[\frac{a+b}{2}, b]$. Alors f est majorée sur $[a, b]$ par $M = \text{Max}(M_1, M_2)$:

$$\forall x \in [a, b], \begin{cases} f(x) \leq M_1 & \text{si } x \leq \frac{a+b}{2} \\ f(x) \leq M_2 & \text{si } x \geq \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x) \leq \text{Max}(M_1, M_2)$$

Par contraposée alors si f n'est pas majorée sur $[a, b]$, alors elle n'est pas majorée sur au moins l'un ou l'autre de $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$.

1.c On s'inspire de la démonstration par **dichotomie** du théorème des valeurs intermédiaires. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, supposant a_n et b_n construites avec $a_n \leq b_n$, on pose

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}) & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \\ (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n) & \text{si } f \text{ n'est pas majorée sur } [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \end{cases}$$

On vérifie alors qu'on a bien dans chacun des deux cas $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, et enfin $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et la suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$ et tend vers 0 pour $n \rightarrow +\infty$. Donc ces suites sont bien **adjacentes**.

1.d C'est la négation de « majorée » : on fixe $n \in \mathbb{N}$, et f n'est pas majorée sur $[a_n, b_n]$, donc n n'est pas un majorant et donc il existe un élément dans $[a_n, b_n]$ (qui dépend de n) qu'on appelle c_n tel que $f(c_n) \geq n$.

1.e *Attention à la rigueur et à l'ordre logique des arguments.*

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles convergent vers un même élément $d \in [a, b]$. On écrit alors clairement l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq c_n \leq b_n$$

qui montre d'après le théorème des gendarmes que c_n converge aussi pour $n \rightarrow +\infty$ vers cette même limite d .

Par continuité de f , alors la suite des $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la valeur $f(d)$. Mais d'autre part l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(c_n) \geq n$$

montre par le théorème du gros gendarme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n) = +\infty$. C'est ici qu'il y a une **contradiction** (la limite ne peut pas être à la fois un nombre réel et $+\infty$). En conclusion on a terminé de montrer que f doit être majorée.

2 Remarque : M est bien défini car f est majorée sur un intervalle $[a, b]$ non-vidé.

2.a On souhaite maintenant montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = M$. L'hypothèse que l'on considère par l'absurde est $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq M$. Dans ce cas alors la fonction g est **continue** sur $[a, b]$ (il n'y a pas de division par zéro) et donc on peut lui appliquer les questions précédentes : g est majorée. Donc on $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b], g(x) \leq A$.

2.b De façon équivalente on a $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$. La fonction g étant par hypothèses strictement positive, alors $A > 0$ et $\frac{1}{A} > 0$ aussi. Ceci montre que M n'est pas le plus petit majorant de f , car $M - \frac{1}{A}$ est encore un majorant strictement plus petit. Ceci est **contradictoire** par définition de la borne supérieure. En conclusion on a démontré que la borne supérieure doit être atteinte.

3 *On peut tout recommencer, ou utiliser $-f$.*

De même, $-f$ est continue sur $[a, b]$. Donc elle admet un maximum qui est atteint. C'est donc un minimum pour f , qui est atteint.

Problème 2

- 1 La variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: il s'agit de compter le nombre de succès (atteindre le seuil de croissance) pour n plantes indépendantes, chaque succès étant réalité avec probabilité p .
- 2 On trouve $\mathbb{P}(Y = 1) = pq$ (passer le seuil de croissance puis présenter une floraison) et $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - pq$.
- 3 Il y a en tout 3 cas possibles pour chacune des deux plantes (soit un total de 9 cas) :
 - Ne pas passer le seuil de croissance, avec probabilité $(1 - p)$,
 - Le passer mais ne pas présenter de floraison, avec probabilité $p(1 - q)$,
 - Ou passer le seuil et présenter une floraison, avec probabilité pq comme à la question précédente.

Il s'agit alors de compter les probabilités de chacun des 9 cas possibles (la première, et la deuxième plante indépendamment, vont être d'une des trois situations ci-dessus), puis de compter dans chacun des cas combien de plantes ont présenté une floraison.

On trouve alors :

$$\mathbb{P}(Y = 2) = p^2q^2, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 2pq(1 - pq), \quad \mathbb{P}(Y = 0) = (1 - pq)^2$$

- 4 Il s'agit du système complet d'évènements associé à la variable X : d'une part elle prend ses valeurs parmi $\llbracket 0, n \rrbracket$, et d'autre part, si $k \neq k'$ alors les évènements $(X = k)$ et $(X = k')$ sont bien incompatibles. On fixe alors $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ puis on applique alors la **formule des probabilités totales**, pour l'évènement $(Y = \ell)$, par rapport au système complet d'évènements $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$:

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell)$$

Dans cette somme, les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ sont connues (loi binomiale). Qu'est-ce que $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell)$? D'abord c'est 0 si $k < \ell$ (il ne peut pas y avoir plus de plantes qui présentent une floraison, que de plantes qu'on a sélectionné à l'issue de la première étape !) donc on peut déjà ré-écrire que $k \geq \ell$ dans la somme

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=\ell}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell)$$

Enfin, sachant $X = k$ fixé, alors Y se comporte comme une loi binomiale $\mathcal{B}(k, q)$: les plantes sont toujours indépendantes et dans des conditions identiques et on compte, parmi k , combien vont présenter une floraison, ce qui se produit avec probabilité q . On peut donc bien écrire

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=\ell}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{k}{\ell} q^\ell (1-q)^{k-\ell}$$

qui est la formule demandée (à l'ordre près des termes).

- 5 C'est un simple calcul sur les coefficients binomiaux.

Soient $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket \ell, n \rrbracket$, alors :

$$\binom{k}{\ell} \times \binom{n}{k} = \frac{k!}{\ell! (k-\ell)!} \times \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{\ell! (k-\ell)! (n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{\ell} \times \binom{n-\ell}{n-k} = \frac{n!}{\ell! (n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(n-k)! (k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell! (n-k)! (k-\ell)!}$$

- 6 Utilisant la formule démontrée sous la somme, alors :

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=\ell}^n \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{n-k} p^k (1-p)^{n-k} q^\ell (1-q)^{k-\ell}$$

Cette fois, le terme $\binom{n}{\ell}$ est constant par rapport à k :

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \binom{n}{\ell} \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{n-k} p^k (1-p)^{n-k} q^\ell (1-q)^{k-\ell}$$

On a alors très envie de poser le changement d'indice $k = \ell + i$ pour ramener la somme à partir de 0 :

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \binom{n}{\ell} \sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{n-\ell-i} p^{\ell+i} (1-p)^{n-\ell-i} q^\ell (1-q)^i$$

Cela se ré-écrit aussi (le but est de voir apparaître un binôme de Newton pour une puissance $n - \ell$, et une loi binomiale de paramètre pq inspiré par les premières questions)

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \binom{n}{\ell} p^\ell q^\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{i} [p(1-q)]^i [1-p]^{n-\ell-i}$$

soit

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \binom{n}{\ell} (pq)^\ell [p(1-q) + 1-p]^{n-\ell}$$

Le terme sous le crochet se développe en $1 - pq$. On trouve donc bien :

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \binom{n}{\ell} (pq)^\ell (1-pq)^{n-\ell}$$

valable pour tout $0 \leq \ell \leq n$, ce qui termine de montrer que Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, pq)$.

Problème 3

1 Pour $n = 0$, alors f est $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Cette fonction n'admet pas de limite pour $x \rightarrow 0$ (*vu en cours*) donc f n'est pas continue en 0.

2 Pour $n = 1$, c'est $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

2.a D'abord f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car $\frac{1}{x}$ l'est. Puis on a la majoration en valeur absolue

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x^2|$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ donc par encadrement (gendarmes) on déduit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, qui est aussi $f(0)$. Ceci montre que f est continue en 0.

2.b Soit $x \neq 0$. Le taux de variations de f entre 0 et x est

$$\tau_f(0, x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par le même argument que ci-dessus alors $\lim_{x \rightarrow 0} \tau_f(0, x) = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2.c Pour $x \neq 0$, on calcule

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Alors d'une part par le même argument

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

D'autre part : si $f'(x)$ avait une limite pour $x \rightarrow 0$, alors $f'(x) - 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ aussi, or ceci est égal à $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, qui n'a pas de limite pour $x \rightarrow 0$. Donc par l'absurde, $f'(x)$ n'a pas de limite pour $x \rightarrow 0$. Ceci montre que f' n'est pas continue en 0.

3 On suit soigneusement le même plan avec $f : x \mapsto x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$).

- D'abord f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- On calcule encore une fois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.
- f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Par cette même formule, on déduit aussi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.
- D'autre part pour le taux de variations entre 0 et x :

$$\tau_f(0, x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc $f'(0) = 0$. Combiné à la question précédente, alors f' est continue en 0 : à ce stade f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- f' est encore dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall x \neq 0, \quad f''(x) = 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On voit alors que $f''(x)$ n'a pas de limite pour $x \rightarrow 0$: en effet on sait que $12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$ et $6x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$, donc si $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ existait et était égal à un certain $\ell \in \mathbb{R}$ on déduirait

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f''(x) - 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \ell$$

mais ceci est égal à $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'a pas de limite pour $x \rightarrow 0$ donc c'est absurde.

- Cependant pour le taux de variations de f' entre 0 et x :

$$\tau_{f'}(0, x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f' est dérivable en 0 et $f''(0) = 0$.

On a donc bien démontré : f est dérivable sur \mathbb{R} , f' est continue sur \mathbb{R} , f' est dérivable sur \mathbb{R} , mais la dérivée de f' n'est pas continue en 0.

4 Il s'agit de généraliser le phénomène précédent. On n'arrive pas à trouver une formule exactes pour les dérivées successives de f mais on sait en conjecturer une certaine forme.

4.a On fixe $n \in \mathbb{N}$. On démontre par récurrence l'hypothèse proposée.

Pour $k = 0$ il suffit de poser $P_0 : x \mapsto 1$ et $Q_0 : x \mapsto 0$, en effet $f^{(0)} = f$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$, et supposons construits des polynômes P_k et Q_k tels que

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(k)}(x) = x^{2(n-k)} \left(P_k(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Dérivons cette relation et regroupons les facteurs : $\forall x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= 2(n-k)x^{2(n-k)-1} \left(P_k(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &\quad + x^{2(n-k)} \left(P_k'(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{P_k(x)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k'(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{Q_k(x)}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= x^{2(n-k)-2} \left((2(n-k)xP_k(x) + x^2P_k'(x) + Q_k(x)) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. + (2(n-k)xQ_k(x) + x^2Q_k'(x) - P_k(x)) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

Sachant $x^{2(n-k)-2} = x^{2(n-(k+1))}$, on voit alors apparaître les polynômes P_{k+1} et Q_{k+1} :

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= 2(n-k)xP_k(x) + x^2P_k'(x) + Q_k(x) \\ Q_{k+1}(x) &= 2(n-k)xQ_k(x) + x^2Q_k'(x) - P_k(x) \end{aligned}$$

Ce sont bien des polynômes car les dérivées de P_k , Q_k , et leur produit par x , x^2 , sont encore des polynômes.

Il faut faire attention à ce qu'il ne reste pas de puissances négatives. C'est le point où on voulait en venir : tant que $0 \leq k \leq n$, les dérivées de f s'expriment avec des polynômes comme coefficients devant les fonctions $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

- 4.b i** On démontre maintenant avec les méthodes des questions précédentes par récurrence sur l'entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ la propriété : « $f^{(k)}(0) = 0$ et f est \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} ».

Pour $k=0$: $f(0) = 0$, et si $x \neq 0$, $f(x)$ est égal à $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (pas de limite, mais borné par 1) multiplié par une puissance de x strictement positive, donc qui tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0.

Pour $0 \leq k \leq n-2$ quelconque, supposons que $f^{(k)}(0) = 0$ et que f soit \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} . Alors d'une part on a l'expression pour $f^{(k+1)}$, valable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$: avec $k+1 < n$ alors devant, le terme $x^{2(n-(k+1))}$ tend bien vers 0 pour $x \rightarrow 0$, et les polynômes ont une limite finie $P_k(0)$, $Q_k(0)$ et restent bornés, donc les deux termes

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2(n-(k+1))} P_k(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{2(n-(k+1))} Q_k(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

On déduit donc $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k+1)}(x) = 0$.

D'autre part pour le taux de variations de $f^{(k)}$ entre 0 et $x \neq 0$,

$$\tau_{f^{(k)}}(0, x) = \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = x^{2(n-k)-1} \left(P_k(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Mais, toujours pour les mêmes raisons, la puissance de x qui apparaît est strictement positive et donc tout ceci tend vers 0, ainsi $f^{(k)}$ est dérivable en 0 et $f^{(k+1)}(0) = 0$.

On a donc montré que f^k est dérivable sur \mathbb{R} et que $f^{(k+1)}$ est continue sur \mathbb{R} .

- ii** Avec la formule pour $f^{(n-1)}$ et son taux de variations entre 0 et x , sachant par la question précédente $f^{(n-1)}(0) = 0$:

$$\tau_{f^{(n-1)}}(0, x) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} = x \left(P_k(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Ceci tend bien vers 0 pour $x \rightarrow 0$ (*mais de justesse ! c'est la dernière fois qu'on peut appliquer l'argument*) donc $f^{(n)}(0) = 0$.

- 4.c** En évaluant les relations de récurrence en $x = 0$ on trouve directement :

$$P_{k+1}(0) = Q_k(0) \quad \text{et} \quad Q_{k+1}(0) = -P_k(0)$$

Sachant qu'au départ $(P_0(0), Q_0(0)) = (1, 0)$ alors la suite des $(P_k(0), Q_k(0))$ est en fait périodique et vaut

$$(1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 0), \quad \dots$$

Il y a donc toujours exactement un seul des deux termes qui est non-nul entre $P_k(0)$ et $Q_k(0)$.

- 4.d** La formule pour $f^{(n)}$ est directement :

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_n(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si n est pair, le terme $Q_n(x) \rightarrow Q_n(0) = 0$ et $P_n(x) \rightarrow P_n(0) \neq 0$ pour $x \rightarrow 0$. Alors toujours par encadrement

$$\left| Q_n(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |Q_n(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et le terme $P_n(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite pour $x \rightarrow 0$, sinon en divisant par $P_n(x)$, le terme $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en aurait une. Alors : si $f^{(n)}(x)$ avait une limite $\ell \in \mathbb{R}$ pour $x \rightarrow 0$ on aurait

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f^{(n)}(x) - Q_n(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \ell$$

ce qui serait absurde ! Donc $f^{(n)}$ n'a pas de limite en 0.

Si n est impair, c'est la même chose mais cette fois $Q_n(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite alors que $P_n(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0, pour $x \rightarrow 0$.

Dans tous les cas on a bien démontré : $f^{(n)}$ existe sur \mathbb{R} , mais n'est pas continue en 0.