DM 4 Mathématiques
Correction

Problème 1

1. Voir les questions suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3+x^2-x+2=(x+2)\times(x^2-x+1)$. Pour le polynôme $x\mapsto x^2-x+1$ alors $\Delta=-3<0$, ce terme reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $x^3+x^2-x+2=0$ si et seulement si $x=-2$. Ce terme ne s'annule donc pas pour $x=-2$ et ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$. En particulier f est $\boxed{\text{continue}}$ sur $I=]-2,+\infty[$, et donc des primitives existent.
2. (a)
   - Analyse : on cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x\in I$,
   $$\begin{aligned}\frac{x}{x^3+x^2-x+2}&=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} &(1)\\ &=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2-x+1)} &(2)\\ &=\frac{(a+b)x^2+(-a+2b+c)x+(a+2c)}{x^3+x^2-x+2} &(3)\end{aligned}$$
   Ceci est vérifié dès que
   $$\begin{cases} a+\ \ b \qquad\ =0\\ -a+2b+\ \ c=1\\ a \qquad\ +2c=0\end{cases}\qquad(4)$$
   On trouve alors rapidement comme solution $\boxed{a=-\frac{2}{7}}$, $\boxed{b=\frac{2}{7}}$, $\boxed{c=\frac{1}{7}}$.
   - Synthèse : d'après les calculs
   $$\boxed{\forall x\in I,\quad \frac{x}{x^3+x^2-x+2}=-\frac{2}{7}\times\frac{1}{x+2}+\frac{1}{7}\times\frac{2x+1}{x^2-x+1}}\qquad(5)$$

   (b) Alors $A(x)=-\frac{2}{7}\times\frac{1}{x+2}$ et donc les primitives de A sur I sont les
   $$\boxed{x\mapsto-\frac{2}{7}\ln(x+2)+K_1,\quad K_1\in\mathbb{R}}\qquad(6)$$
3. (a)
   - Analyse : on cherche $(d,e)\in\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x\in I$,
   $$\begin{aligned}\frac{1}{7}\times\frac{2x+1}{x^2-x+1}&=d\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{e}{x^2-x+1} &(7)\\ &=\frac{2dx+(-d+e)}{x^2-x+1} &(8)\end{aligned}$$
   Ceci est vérifié dès que
   $$\begin{cases}2d \qquad =\frac{2}{7}\\ -d+e=\frac{1}{7}\end{cases}\qquad(9)$$
   On trouve alors $\boxed{d=\frac{1}{7}}$ et $\boxed{e=\frac{2}{7}}$.
   - Synthèse : par ces calculs, on a bien
   $$\boxed{\forall x\in I,\quad \frac{1}{7}\times\frac{2x+1}{x^2-x+1}=\frac{1}{7}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{x^2-x+1}}\qquad(10)$$

   (b) Alors $B(x)=\frac{1}{7}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ et pour cette dernière on reconnait (à des constantes près) la forme $\frac{u'}{u}$. Les primitives de B sur I sont les
   $$\boxed{x\mapsto\frac{1}{7}\ln(x^2-x+1)+K_2,\quad K_2\in\mathbb{R}}\qquad(11)$$

4. On pose
$$F(x) = \frac{2}{7}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t + 1} \tag{12}$$

   (a) *(Recherche informelle)* On pose $u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$. Alors ceci est équivalent à $t = \frac{1+u\sqrt{3}}{2}$. En remplaçant alors :
$$\begin{aligned} t^2 - t + 1 &= \left(\frac{1+u\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+u\sqrt{3}}{2}\right) + 1 && (13)\\ &= \frac{1}{4}\Big(1 + 2u\sqrt{3} + 3u^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 + u\sqrt{3}\Big) + 1 && (14)\\ &= \frac{1}{4}\Big(1 + 2u\sqrt{3} + 3u^2 - 2 - 2u\sqrt{3} + 4\Big) && (15)\\ &= \frac{1}{4}(3 + 3u^2) && (16)\\ &= \frac{3}{4}(1 + u^2) && (17)\end{aligned}$$

   De plus on aura $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$; et $t = 0$ correspond à $u = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = x$ correspond à $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
   (Formalisation) On pose $\varphi : t \in [0, x] \mapsto \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, avec $\varphi'(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et on vérifie qu'on applique bien la formule du changement de variable :
$$F(x) = \frac{2}{7}\int_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}(1+u^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{4\sqrt{3}}{21}\int_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \tag{18}$$

   On peut alors calculer F avec une primitive en arctangente, ce qui était le but :
$$F(x) = \frac{4\sqrt{3}}{21} \times \Big[\arctan(u)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{7}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F(x)} \tag{19}$$

   (b) La partie constante ne joue aucun rôle (elle provient du choix de $x = 0$ comme borne en bas de l'intégrale). Les primitives de C sur I sont donc les
$$\boxed{x \mapsto \frac{4\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K_3, \quad K_3 \in \mathbb{R}} \tag{20}$$

5. Il suffit de sommer les primitives précédentes. Les constantes K_1, K_2, K_3 se regroupent en une seule constante. Donc toutes les primitives de f sont les
$$\boxed{x \mapsto -\frac{2}{7}\ln(x+2) + \frac{1}{7}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{4\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}} \tag{21}$$

Remarque : le changement de variables proposé peut se retrouver aussi par la forme canonique :
$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) \tag{22}$$

C'est le choix permettant de se ramener à une primitive en arctangente. Les méthodes présentées permettent d'intégrer toutes les fonctions du type $1/P$ où P est un polynôme de degré 2, avec des primitives combinant des logarithmes et des arctangentes. Plus généralement, en factorisant les polynômes et en « décomposant en éléments simples » les fractions (séparer un produit $1/(PQ)$ en $A/P + B/Q$), on sait en théorie intégrer tous les quotients de polynômes de n'importe quel degré.

Problème 2

1. Un primitive est la fonction $\boxed{\text{arctangente}}$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^x = \arctan(x) - \arctan(0) = \boxed{\arctan(x)} \tag{23}$$

2. On peut fixer $t \in \mathbb{R}$ en dehors de la récurrence. Démontrons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{«} \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \text{»} \tag{24}$$

- Initialisation : pour $n = 0$ cela signifie

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - \frac{t^2}{1+t^2} \tag{25}$$

  et c'est bien vrai.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} t^{2n+2} \tag{26}$$

  et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2(n+1)+2}}{1+t^2} &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} t^{2n+2} \right) + (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+4}}{1+t^2} && (27) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \left((-1)^{n+1} t^{2n+2} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+4}}{1+t^2} \right) && (28) \end{aligned}$$

  Mais pour ce terme sous la parenthèse, mettons au même dénominateur :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} t^{2n+2} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+4}}{1+t^2} &= (-1)^{n+1} \left(\frac{t^{2n+2}(1+t^2) - t^{2n+4}}{1+t^2} \right) && (29) \\ &= (-1)^{n+1} \times \frac{t^{2n+2} + t^{2n+4} - t^{2n+4}}{1+t^2} && (30) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} && (31) \end{aligned}$$

  et donc on retrouve bien

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2(n+1)+2}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \tag{32}$$

  par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Remarque : c'est en fait directement la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, de raison $-t^2$, qu'il est plus facile de lire sous cette forme :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1-(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{33}$$

3. L'égalité précédente est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc l'intégrer entre 0 et x (x est fixé dans $\mathbb{R}$). Par $\boxed{\text{linéarité}}$, le symbole intégrale passe par-dessus le symbole somme :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t && (34) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t && (35) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t && (36) \end{aligned}$$

Or on calcule à part, pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{37}$$

d'où

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} \tag{38}$$

4. *(Recherche informelle)* On pose $t = ux$, alors $t = 0$ correspond à $u = 0$, et $t = x$ correspond à $u = 1$. De plus $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ donc pour la « forme différentielle » :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+2}u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \times x\,\mathrm{d}u \tag{39}$$

(Formalisation) On pose $\varphi : u \in [0,1] \mapsto ux$ avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = x$, et $\varphi'(u) = x$ et on vérifie qu'on a bien appliqué la formule du changement de variable :

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \times x\,\mathrm{d}u \tag{40}$$

Par linéarité (sortir les x) c'est aussi

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x^{2n+3}\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u} \tag{41}$$

5. Quelque soit $0 \leqslant u \leqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 0$ et donc $1 + x^2u^2 \geqslant 1$ donc

$$0 \leqslant \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \leqslant u^{2n+2} \tag{42}$$

En intégrant de 0 à 1, avec la $\boxed{\text{croissance}}$ de l'intégrale, il vient

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{2n+2}\,\mathrm{d}u} \tag{43}$$

Ce dernier terme se calcule à part comme précédemment :

$$\int_0^1 u^{2n+2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3} \tag{44}$$

Alors d'après les questions précédentes

$$\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|(-1)^{n+1}x^{2n+3}\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u\right| \tag{45}$$

$$= |x|^{2n+3}\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u \tag{46}$$

$$\leqslant |x|^{2n+3} \times \frac{1}{2n+3} \tag{47}$$

C'est bien

$$\boxed{\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}} \tag{48}$$

6. Sous cette hypothèse alors
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0} \tag{49}$$
C'est maintenant le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on sait
$$-\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \tag{50}$$
et les termes des deux côtés tendent vers 0, donc
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) = 0 \tag{51}$$
ce qui est bien la même chose que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)} \tag{52}$$

7. Il s'agit tout simplement de calculer une somme, tant que le terme $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ est plus grand que ε : à la fin de la boucle, il sera strictement plus petit que ε. Si le x passé en argument est plus grand que 1, cela ne se produit jamais et on a une boucle infinie.
Autorisons-nous à utiliser la fonction Python de base `abs(x)` pour la valeur absolue (on sait bien sûr la programmer nous-même s'il faut). Version naïve :
```python
def arctan(x, epsilon):
    # éviter une boucle infinie
    assert -1 < x and x < 1
    # somme
    S = 0
    k = 0
    while abs(x)**(2*k+3) / (2*k+3) >= epsilon:
        S = S + (-1)**k * x**(2*k+1) / (2*k+1)
        k = k + 1
    return S
```
Ce programme n'est pas extrêmement intelligent. Au minimum, introduire une variable qui représente les puissances impaires de x au fur et à mesure de la boucle, pour éviter de faire recalculer les puissances (et donc les produits $x \times \cdots \times x$) depuis le début. On peut aussi remplacer les $(-1)^k$ (qui a priori nécessitent des calculs de puissances) par des tests sur la parité de k pour savoir si on doit sommer ou soustraire.

```python
def arctan(x, epsilon):
    # éviter une boucle infinie
    assert -1 < x and x < 1
    # somme
    S = 0
    k = 0
    # variable qui représente x**(2k+1)
    xx = x
    while abs(xx*x*x) / (2*k+3) >= epsilon:
        if  k % 2 == 0:
            # k pair, sommer
            S = S + xx / (2*k+1)
        else:
            # k impair, retrancher
            S = S - xx / (2*k+1)
        k = k + 1
        # multiplier deux fois par x
        xx = xx * x * x
    return S
```

Remarque : c'est cette formule qui est réellement utilisée par les ordinateurs et par les calculatrices pour calculer $\arctan(x)$*, surtout quand* x *est petit et qu'il suffit de sommer peu de termes pour obtenir une très bonne approximation.*