DM 3 Mathématiques

TD 10 exercice 5

Soit E l'ensemble des fonctions polynômes de degré au plus 3 ($P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$). Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes de E dans $\mathbb{R}^4$:

- Cas bijectif : donner la bijection réciproque.
- Cas non surjectif : donner au moins un élément qui n'est pas dans l'image.
- Cas non injectif : donner tous les antécédents de $(0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: P \longmapsto (P(-1), P(-2), P(1), P(2)) \\
\varphi_2 &: P \longmapsto (P(1), P'(1), P(-1), P'(-1)) \\
\varphi_3 &: P \longmapsto (P(-1), P'(-1), P'(1), P(2))
\end{aligned}$$

TD 11 exercice 12

Pour tout $n \geqslant 1$, on souhaite dénombrer l'ensemble E_n des suites de n chiffres 0 ou 1 telles qu'il n'y a jamais deux 1 consécutifs. On note par exemple $1010001010010 \in E_{13}$ une telle suite.

1. Énumérer les éléments de E_k pour tous $1 \leqslant k \leqslant 5$, et donner $\mathrm{Card}(E_k)$.
2. Pour $n \geqslant 2$, soit A_n l'ensemble des suites de E_n commençant par 0, et B_n l'ensemble des suites commençant par 10. Montrer que A_n et B_n forment une partition de E_n.
3. En déduire $\mathrm{Card}(E_n) = \mathrm{Card}(E_{n-1}) + \mathrm{Card}(E_{n-2})$.
4. Quelle relation de récurrence célèbre reconnait-ton ? On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, justifier :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{Card}(E_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}\right)$$
5. En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{Card}(E_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} 5^j$$