DM 3 Mathématiques
Correction

TD 10 exercice 5

Pour tout l'exercice on pose $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, et alors $P' : x \mapsto 3ax^2 + 2bx + c$. Les inconnues sont les variables (a, b, c, d), ce sont celles-ci qu'il faut bien aligner en colonnes. On utilise certainement la méthode « tout d'un coup ».

- φ_1 Soit $P \in E$, soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. L'équation $\varphi_1(P) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est équivalente à :

$$\varphi_1(P) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \iff \begin{cases} -a + b - c + d = \alpha & L_1 \\ -8a + 4b - 2c + d = \beta & L_2 \\ a + b + c + d = \gamma & L_3 \\ 8a + 4b + 2c + d = \delta & L_4 \end{cases} \tag{1}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = \gamma & L_3 \\ 2b + 2d = \alpha + \gamma & L_1 + L_3 \\ 12b + 6c + 9d = \beta + 8\gamma & L_2 + 8L_3 \\ -4b - 6c - 7d = \delta - 8\gamma & L_4 - 8L_3 \end{cases} \tag{2}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = \gamma & L_1 \\ 2b + 2d = \alpha + \gamma & L_2 \\ 6c - 3d = -6\alpha + \beta + 2\gamma & L_3 - 6L_2 \\ -6c - 3d = 2\alpha - 6\gamma + \delta & L_4 + 2L_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = \gamma & L_1 \\ 2b + 2d = \alpha + \gamma & L_2 \\ 6c - 3d = -6\alpha + \beta + 2\gamma & L_3 \\ -6d = -4\alpha + \beta - 4\gamma + \delta & L_4 + L_3 \end{cases} \tag{4}$$

À ce stade le système est échelonné. Il est de $\boxed{\text{rang 4}}$, c'est un $\boxed{\text{système de Cramer}}$. Cela signifie déjà que l'application $\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective}}$: quelque soit le choix de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, ce système admet une unique solution, et donc il existe un unique polynôme P tel que $\varphi_1(P) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (concrètement : on peut fixer des ordonnées quelconques en -2, -1, 1, 2, et trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 passant par ces 4 points). Il reste alors à résoudre le système pour trouver l'application réciproque : on trouve successivement (en remontant de bas en haut)

$$d = \frac{1}{6}\Big(4\alpha - \beta + 4\gamma - \delta\Big) \tag{5}$$

$$c = \frac{1}{12}\Big(-8\alpha + \beta + 8\gamma - \delta\Big) \tag{6}$$

$$b = \frac{1}{6}\Big(-\alpha + \beta - \gamma + \delta\Big) \tag{7}$$

$$a = \frac{1}{12}\Big(2\alpha - \beta - 2\gamma + \delta\Big) \tag{8}$$

et φ_1^{-1} est l'application qui à $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ associe le polynôme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec les coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ ci-dessus.

- φ_2 Même méthode. Soit $P \in E$, soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

$$\varphi_1(P) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \iff \begin{cases} a + \ \ b + c + d = \alpha & L_1 \\ 3a + 2b + c \qquad = \beta & L_2 \\ -a + \ \ b - c + d = \gamma & L_3 \\ 3a - 2b + c \qquad = \delta & L_4 \end{cases} \tag{9}$$

$$\iff \begin{cases} a + \ \ b + \ \ c + \ \ d = \alpha & L_1 \\ - \ \ b - 2c - 3d = -3\alpha + \beta & L_2 - 3L_1 \\ 2b \qquad + 2d = \alpha + \gamma & L_3 + L_1 \\ - 5b - 2c - 3d = -3\alpha + \delta & L_4 - 3L_1 \end{cases} \tag{10}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + \ \ c + \ \ d = \alpha & L_1 \\ b + 2c + \ \ 3d = 3\alpha - \beta & -L_2 \\ - 4c - \ \ 4d = -5\alpha + 2\beta + \gamma & L_3 + 2L_2 \\ 8c + 12d = 12\alpha - 5\beta + \delta & L_4 - 5L_2 \end{cases} \tag{11}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + \ \ c + \ \ d = \alpha & L_1 \\ b + 2c + 3d = 3\alpha - \beta & L_2 \\ 4c + 4d = 5\alpha - 2\beta - \gamma & -L_3 \\ 4d = 2\alpha - \beta + 2\gamma + \delta & L_4 + 2L_3 \end{cases} \tag{12}$$

Le système est échelonné, de $\boxed{\text{rang } 4}$, c'est un $\boxed{\text{système de Cramer}}$; encore une fois, cela signifie que $\boxed{\varphi_2 \text{ est bijective}}$. Concrètement : on peut fixer une valeur et une tangente, en 1 et en -1, et trouver un unique polynôme de degré au plus 3 passant par ces valeurs et ces tangentes.
On trouve alors en résolvant

$$d = \frac{1}{4}\Big(2\alpha - \beta + 2\gamma + \delta\Big) \tag{13}$$

$$c = \frac{1}{4}\Big(3\alpha - \beta - 3\gamma - \delta\Big) \tag{14}$$

$$b = \frac{1}{4}\Big(\beta - \delta\Big) \tag{15}$$

$$a = \frac{1}{4}\Big(-\alpha + \beta + \gamma + \delta\Big) \tag{16}$$

et φ_2^{-1} est l'application qui à $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ associe le polynôme donné par les coefficients ci-dessus.

- φ_3 Soit $P \in E$, soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$.

$$\varphi_1(P) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \iff \begin{cases} -a + b - c + d = \alpha & L_1 \\ 3a - 2b + c = \beta & L_2 \\ 3a + 2b + c = \gamma & L_3 \\ 8a + 4b + 2c + d = \delta & L_4 \end{cases} \tag{17}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c - d = -\alpha & -L_1 \\ b - 2c + 3d = 3\alpha + \beta & L_2 + 3L_1 \\ 5b - 2c + 3d = 3\alpha + \gamma & L_3 + 3L_1 \\ 12b - 6c + 9d = 8\alpha + \delta & L_4 + 8L_1 \end{cases} \tag{18}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c - d = -\alpha & L_1 \\ b - 2c + 3d = 3\alpha + \beta & L_2 \\ 8c - 12d = -12\alpha - 5\beta + \gamma & L_3 - 5L_2 \\ 18c - 27d = -28\alpha - 12\beta + \delta & L_4 - 12L_2 \end{cases} \tag{19}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c - d = -\alpha & L_1 \\ b - 2c + 3d = 3\alpha + \beta & L_2 \\ 8c - 12d = -12\alpha - 5\beta + \gamma & L_3 \\ 0 = -4\alpha - 3\beta - 9\gamma + 4\delta & 4L_4 - 9L_3 \end{cases} \tag{20}$$

C'est un système de $\boxed{\text{rang } 3}$ avec une $\boxed{\text{condition de compatibilité}}$. Il n'admet donc pas des solutions quelque soient les valeurs de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ et donc $\boxed{\varphi_3 \text{ n'est pas surjective}}$: précisément l'élément $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est dans l'image si et seulement si la relation $0 = -4\alpha - 3\beta - 9\gamma + 4\delta$ est vérifiée. Par exemple l'élément $(1,0,0,0)$ n'est pas dans l'image de φ_3 (concrètement : il n'existe pas de polynôme P de degré inférieur à 3 tel que $P(-1) = 1$, $P'(-1) = 0$, $P'(1) = 0$ et $P(2) = 0$).
Dans le même temps nous allons voir que $\boxed{\varphi_3 \text{ n'est pas injective}}$ car les éléments de $\mathbb{R}^4$ qui ont un antécédent en ont une infinité : la variable $\boxed{d \text{ étant libre}}$, un élément qui admet un antécédent en admet en fait un pour chacune des valeurs de $d \in \mathbb{R}$. Déterminons par exemple tous les antécédents de $(0,0,0,0)$: cela revient à résoudre (les calculs sont maintenant plus simples car on remplace tout le second membre ci-dessus par 0)

$$\begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ b - 2c + 3d = 0 \\ 8c - 12d = 0 \\ 0d = 0 \end{cases} \tag{21}$$

d est libre donc on pose $d = \lambda \in \mathbb{R}$ et alors on trouve en remontant

$$d = \lambda \tag{22}$$

$$c = \frac{3}{2}\lambda \tag{23}$$

$$b = 0 \tag{24}$$

$$a = -\frac{\lambda}{2} \tag{25}$$

Autrement dit tous les antécédents de $(0,0,0,0)$ sont les polynômes

$$P : x \mapsto -\frac{\lambda}{2}\left(x^3 - 3x - 2\right) \tag{26}$$

qui vérifient tous $P(-1) = P'(-1) = P'(1) = P(2) = 0$ mais ne sont pas le polynôme nul.

TD 11 exercice 12

1. Les éléments, déjà listés selon le bon ordre intelligent :

$$E_1 = \Big\{0, 1\Big\} \tag{27}$$
$$E_2 = \Big\{00, 01, 10\Big\} \tag{28}$$
$$E_3 = \Big\{000, 001, 010, 100, 101\Big\} \tag{29}$$
$$E_4 = \Big\{0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010\Big\} \tag{30}$$
$$E_5 = \Big\{00000, 00001, 00010, 00100, 00101, 01000, 01001, 01010, 10000, 10001, 10010, 10100, 10101\Big\} \tag{31}$$

On déduit donc $\boxed{\mathrm{Card}(E_1) = 2}$, $\boxed{\mathrm{Card}(E_2) = 3}$, $\boxed{\mathrm{Card}(E_3) = 5}$, $\boxed{\mathrm{Card}(E_4) = 8}$ et enfin $\boxed{\mathrm{Card}(E_5) = 13}$.
Remarque : il est cohérent de considérer que E_0 est constitué d'un unique élément, la « suite vide », et que $\mathrm{Card}(E_0) = 1$.

2. Si une suite de E_n démarre par 0, alors elle est dans A_n. Sinon elle démarre par 1, dans ce cas (comme $n \geqslant 2$) le caractère suivant ne peut pas être encore un 1, donc la suite démarre en fait par 10. Cela montre que toute suite de E_n est soit dans A_n soit dans B_n, autrement dit ces deux ensembles forment une partition de E_n :

$$\boxed{E_n = A_n \cup B_n \quad \text{et} \quad A_n \cap B_n = \emptyset} \tag{32}$$

3. Par la relation précédente on déduit automatiquement

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_n) = \mathrm{Card}(A_n) + \mathrm{Card}(B_n)} \tag{33}$$

Mais il y a autant de suites dans A_n que dans E_{n-1} : formellement, A_n est en bijection avec E_{n-1}, la bijection retire le premier 0 de la suite (et la bijection réciproque le remet !). Donc $\boxed{\mathrm{Card}(A_n) = \mathrm{Card}(E_{n-1})}$. De même, il y a autant de suites dans B_n que dans E_{n-2}, la bijection consistant à retirer la séquence 10 au début de la suite ou bien à la remettre. Donc $\boxed{\mathrm{Card}(B_n) = \mathrm{Card}(E_{n-2})}$ (ici il faut $n \geqslant 3$, ou bien considérer que $\mathrm{Card}(E_0) = 1$: effectivement, il y a un unique élement dans B_2, la suite 10, qui est bien la séquence 10 ajoutée à la suite vide).
Conclusion : en combinant avec la question précédente

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_n) = \mathrm{Card}(E_{n-1}) + \mathrm{Card}(E_{n-2})} \tag{34}$$

Remarque : il est important de comprendre que les questions précédentes permettent non seulement de compter les éléments de E_n, mais aussi de les énumérer tous dans un ordre intelligent, et c'est ce qui est fait à la première question. On démarre avec $E_1 = \{0, 1\}$, et pour lister les élements de E_n, on ajoute un 0 devant tous ceux de E_{n-1}, puis on ajoute un 10 devant tous ceux de E_{n-2}. Cela donne un ordre logique sur tous les éléments de E_n qui permet d'être certain de les lister tous une et une seule fois. Cela est aussi très lié au chapitre Récursivité en informatique : si on veut écrire une fonction qui nous donne la liste de tous les éléments de E_n (une liste de chaines de caractères tous composés de `"0"` et de `"1"`) alors c'est une très bonne idée d'écrire une fonction récursive, qui récupère tous les éléments de E_{n-1} auxquels elle ajoute à tous le `"0"` initial, et qui récupère aussi tous les élements de E_{n-2} auquels elle ajoute un `"10"` initial ; puis fabrique la liste de tous les éléments de E_n et la renvoie.

4. On reconnait la relation de récurrence de $\boxed{\text{Fibonacci}}$: posons $u_n = \mathrm{Card}(u_n)$ alors

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{35}$$

(éventuellement $u_0 = 1$). L'équation caractéristique est $q^2 = q + 1$, ses deux racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, l'expression proposée étant déjà de la forme $A\varphi^n + B\overline{\varphi}^n$, il suffit de vérifier qu'elle donne la bonne valeur pour u_1 et pour u_2. Or

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^3 - \overline{\varphi}^3\Big) = 2 \tag{36}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^4 - \overline{\varphi}^4\Big) = 3 \tag{37}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{Card}(E_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}\right)} \tag{38}$$

5. Soit $n \geqslant 1$. D'une part pour φ :

$$\varphi^{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} (\sqrt{5})^k \tag{39}$$

Dans cette somme, les termes $(\sqrt{5})^k$ pour k pair sont des nombres entiers (si $k = 2j$ alors $(\sqrt{5})^k = 5^j$), et les termes $(\sqrt{5})^k$ pour k impair sont des multiples entiers de $\sqrt{5}$ (si $k = 2j+1$ alors $(\sqrt{5})^k = 5^j\sqrt{5}$). Si k est pair alors on pose $k = 2j$, avec $0 \leqslant k \leqslant n+2$ donc $0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$, et si k est impair alors on pose $k = 2j+1$ et alors $0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ (car $2j \leqslant n+1$). Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+2} &= \frac{1}{2^{n+2}} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j} (\sqrt{5})^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} (\sqrt{5})^{2j+1} \right) && (40)\\
&= \frac{1}{2^{n+2}} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j} 5^j + \sqrt{5} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} 5^j \right) && (41)
\end{aligned}$$

Pour $\overline{\varphi}$ maintenant : de même

$$\overline{\varphi}^{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}}\left(1-\sqrt{5}\right)^{n} = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} (-1)^k (\sqrt{5})^k \tag{42}$$

Les termes pour k pair sont exactement les même que pour φ, mais ceux pour k impair sont opposés !

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}^{n+2} &= \frac{1}{2^{n+2}} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j} (-1)^{2j} (\sqrt{5})^{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} (-1)^{2j+1} (\sqrt{5})^{2j+1} \right) && (43)\\
&= \frac{1}{2^{n+2}} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j} 5^j - \sqrt{5} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} 5^j \right) && (44)
\end{aligned}$$

On trouve alors directement :

$$\varphi^{n+2} + \overline{\varphi}^{n+2} = 2 \times \frac{1}{2^{n+2}} \times \sqrt{5} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} 5^j \tag{45}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} + \overline{\varphi}^{n+2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+2}{2j+1} 5^j} \tag{46}$$