DM 2 Mathématiques
Correction

TD 5 exercice 12

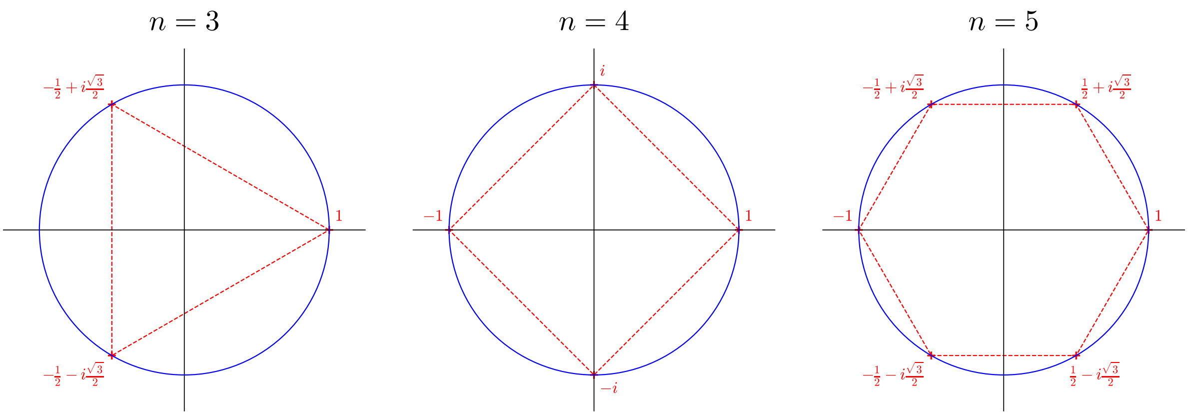
1.
   - Cas $n = 1$: unique solution $\boxed{\{1\}}$.
   - Cas $n = 2$: solutions $\boxed{\{-1, 1\}}$ (voir cours).
   - Cas $n = 4$: on pose $Z = z^2$. L'équation $Z^2 = 1$ a pour solutions $Z_1 = 1$ et $Z_2 = -1$. Il faut alors résoudre $z^2 = Z_1$ (solutions : -1, 1) et $z^2 = Z_2$ (solutions : i, $-i$). Conclusion : l'ensemble de toutes les solutions est $\boxed{\{1, i, -1, -i\}}$.
   - Cas $n = 3$: voir la méthode développée dans l'exercice, on trouve $\boxed{\left\{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\right\}}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, supposons que z soit solution de (E). Appliquant le module des deux cotés alors $|z^n| = |1|$, ce qui signifie aussi $|z|^n = 1$. Mais dans les réels positifs, l'équation $x^n = 1$ admet pour unique solution $x = 1$, et ce quelque soit n (car la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante). On en déduit donc $\boxed{|z| = 1}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, posons $z = e^{i\theta}$. Alors z est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff (e^{i\theta})^n = 1 && (1)\\ &\iff e^{in\theta} = 1 && (2)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi && (3)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n} && (4)\end{aligned}$$

   Donc l'ensemble cherché est $\boxed{\left\{\frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}$.
4. On trouve un ensemble infini pour les valeurs possibles de $\theta \in \mathbb{R}$, mais deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de 2π correspondent au même $z \in \mathbb{C}$. Il y a en fait une unique solution pour chaque valeur de θ telle que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
   Or, posons $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \theta < 2\pi &\iff 0 \leqslant \frac{2k\pi}{n} < 2\pi && (5)\\ &\iff 0 \leqslant k < n && (6)\end{aligned}$$

   Il y a donc exactement $\boxed{n \text{ solutions}}$: les $z = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leqslant k < n$.
5. On obtient dans tous les cas un $\boxed{\text{polygone régulier}}$ inscrit dans le cercle de rayon 1.



TD 5 exercice 13

1. D'un part $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les solutions de $z^2=i$ sont donc
$$\boxed{\left\{\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}, \sqrt{\sqrt{2}}e^{9i\pi/8}\right\}} \tag{7}$$
(où $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$).

2. D'autre part en posant $z=x+iy$, où l'inconnue devient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$z^2=1+i \iff (x^2-y^2)+2ixy=1+i \tag{8}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=1 \end{cases} \tag{9}$$
De $z^2=1+i$ on déduit aussi $|z|^2=|1+i|$ soit $x^2+y^2=\sqrt{2}$. On peut le rajouter pour obtenir une troisième équation :
$$\begin{cases} x^2-y^2=1 & (L_1) \\ 2xy=1 & (L_2) \\ x^2+y^2=\sqrt{2} & (L_3) \end{cases} \tag{10}$$
Avec l'opération $\frac{L_1+L_3}{2}$ on trouve $x^2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et avec $\frac{L_3-L_1}{2}$ on trouve $y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Cela donne en tout quatre solutions pour le couple (x,y) :
$$x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \tag{11}$$
Mais L_2 est vérifiée uniquement pour les couples
$$(x,y)=\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad (x,y)=\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \tag{12}$$
En conclusion, on trouve comme ensemble de solutions complexes à $z^2=i$:
$$\boxed{\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}} \tag{13}$$

Il s'agit maintenant d'idenfitier les deux ensembles de solutions précédentes. Mais en comparant les signes des parties réelles et imaginaires, c'est nécessairement
$$\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sqrt{2}}e^{9i\pi/8}=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \tag{14}$$
La première donne alors
$$\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \tag{15}$$
Si on divise par $\sqrt{\sqrt{2}}$ des deux côtés, c'est
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \tag{16}$$
Manipulant les quantités conjuguées des racines, sous la grosse, racine, on trouve alors
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \tag{17}$$

que nous avions aussi déduit par d'autres méthodes…
La solution avec $e^{9i\pi/8}$ donne avec les même méthodes

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \tag{18}$$

ce qui n'est pas surprenant car $\frac{9\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8}$ et donc on sait déjà $\cos(\frac{9\pi}{8}) = -\cos(\frac{9\pi}{8})$ et $\sin(\frac{9\pi}{8}) = -\sin(\frac{9\pi}{8})$

TD 6 exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit le nombre $u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

1. Calcul : $\boxed{u_0 = 2}$, $\boxed{u_1 = 4}$, $\boxed{u_2 = 14}$ et $\boxed{u_3 = 52}$.

   Ce sont effectivement tous des nombres entiers pairs, les puissances de $\sqrt{3}$ soit se compensent quand leur exposant est impair, soit s'ajoutent quand leur exposant est pair (et ce sont alors des puissances de 3, donc des nombres entiers).

2. u_n est effectivement de la forme $Aq_1^n + Bq_2^n$, qui est typiquement ce qu'on trouve avec les relations de récurrence linéaires d'ordre 2… Raisonnons à l'envers : ici $q_1 = 2+\sqrt{3}$, $q_2 = 2-\sqrt{3}$, sont les deux racines de l'équation caractéristique $(q-q_1)(q-q_2) = 0$ soit (relations entre coefficients et somme et produit des racines) $q^2 - 4q + 1 = 0$. Ceci **démontre** que u_n vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$; mieux, c'est **l'unique suite** qui vérifie cette relation de récurrence avec les conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$.

3. Démontrons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est un entier pair ». On n'a plus besoin de faire référence à la formule qui définit u_n !

   - Initialisation $n = 0$: $u_0 = 2$ est bien un entier pair.
   - Initialisation $n = 1$: $u_1 = 4$ est aussi un entier pair.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et u_{n+1} soient tous les deux des entiers pairs. Alors $u_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n$ est encore un nombre entier. Si on pose $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 2k$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n+1} = 2\ell$ alors $u_{n+2} = 2(4k - \ell)$ où $4k - \ell \in \mathbb{Z}$, donc u_{n+2} est pair.

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un nombre entier pair}}$.