DM 1 Mathématiques
Correction

Exercice 1

D'abord l'expression est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On pose $X = x^2$. Résoudre (E_m) est équivalent à résoudre

$$\begin{cases} x^2 = X \\ X^2 - (2m+4)X + (m-2)^2 = 0 \quad (F_m) \end{cases} \tag{1}$$

Ici (F_m) est bien d'une équation du second degré. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m+4)^2 - 4 \times 1 \times (m-2)^2 && (2) \\ &= (2m)^2 + 4^2 + 2 \times 4 \times 2m - 4 \times 1 \times (m^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times m) && (3) \\ &= 4m^2 + 16 + 16m - 4m^2 - 16 + 16m && (4) \\ &= 32m && (5) \end{aligned}$$

et donc le signe de Δ dépend directement de m. On doit alors distinguer plusieurs cas.

- Cas $m < 0$: alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (F_m) n'admet pas de solutions, et donc (E_m) non plus. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_m = \emptyset}$ dans ce cas.
- Cas $m = 0$: alors $\Delta = 0$ et l'équation (F_m) admet une unique solution qui est

  $$X = \frac{2m+4}{2} = 2 \tag{6}$$

  et il faut alors résoudre l'équation $x^2 = 2$, qui admet deux solutions, donc $\boxed{\mathcal{S}_m = \left\{ -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\}}$ dans ce cas.
- Cas $m > 0$: alors (F_m) admet deux solutions qui sont

  $$X_1 = \frac{(2m+4) - \sqrt{32m}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{(2m+4) + \sqrt{32m}}{2} \tag{7}$$

  En remarquant que $\sqrt{32m} = \sqrt{4^2 \times 2m} = 4\sqrt{m}$, ce sont aussi

  $$X_1 = m + 2 - 2\sqrt{2m} \quad \text{et} \quad X_2 = m + 2 + 2\sqrt{2m} \tag{8}$$

  Il reste alors à résoudre $x^2 = X_1$ et $x^2 = X_2$.
  Pour $x^2 = X_2$ d'abord : puisque $m > 0$ alors clairement $X_2 > 0$ et donc on trouve deux solutions $\sqrt{m + 2 + 4\sqrt{2m}}$ et $-\sqrt{m + 2 + 4\sqrt{2m}}$.
  Pour $x^2 = X_1$ il faut déterminer le signe de X_1. Or la condition $X_1 \geqslant 0$ est équivalente à

  $$\begin{aligned} & m + 2 \geqslant 2\sqrt{2m} && (9) \\ \iff & (m+2)^2 \geqslant (2\sqrt{2m})^2 && (10) \\ \iff & m^2 + 4m + 4 \geqslant 8m && (11) \\ \iff & m^2 - 4m + 4 \geqslant 0 && (12) \end{aligned}$$

  Et dans cette dernière expression on trouve $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, donc $X_1 \geqslant 0$ (si $m = 2$ alors $X_1 = 0$).
  On a alors deux solutions $\sqrt{m + 2 - 2\sqrt{2m}}$ et $-\sqrt{m + 2 - 2\sqrt{2m}}$.
  En résumé dans ce cas :

  $$\boxed{\mathcal{S}_m = \left\{ \sqrt{m+2+2\sqrt{2m}}, -\sqrt{m+2+2\sqrt{2m}}, \sqrt{m+2-2\sqrt{2m}}, -\sqrt{m+2-2\sqrt{2m}} \right\}} \tag{13}$$

Exercice 2

On a vu en TD : pour tout $x \in E$, $x \in A\Delta B \Leftrightarrow (x \in A)$ xor $(x \in B)$, avec la table de vérité

A	B	A xor B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(14)

1. On trouve $A\Delta A = A \setminus A$ donc $\boxed{A\Delta A = \emptyset}$, et $A\Delta\emptyset = A \setminus \emptyset$ donc $\boxed{A\Delta\emptyset = A}$.
2. Une possibilité de rédaction directe : soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Alors

$$\begin{aligned} \overline{A}\Delta\overline{B} &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) && (15)\\ &= \overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup B} && (16)\\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) && (17)\\ &= A\Delta B && (18)\end{aligned}$$

   On utilise d'abord la loi de Morgan pour $\cup$ et pour $\cap$. Dans la dernière étape, $x \in \overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup B}$ signifie $\Big(x \notin (A \cap B)$ et non$(x \notin A \cup B)\Big)$ ce qui est bien la même chose que $\Big(x \notin (A \cap B)$ et $x \in A \cup B\Big)$ et ceci est $x \in A\Delta B$.
3. Soient des parties $A, B, C \subset E$. Le but est de démontrer $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. Or pour tout élément $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in (A\Delta B)\Delta C &\iff (x \in A\Delta B) \text{ xor } (x \in C) && (19)\\ &\iff ((x \in A) \text{ xor } (x \in B)) \text{ xor } (x \in C) && (20)\\ &\iff (x \in A) \text{ xor } ((x \in B) \text{ xor } (x \in C)) && (21)\\ &\iff (x \in A) \text{ xor } (x \in B\Delta C) && (22)\\ &\iff x \in A\Delta(B\Delta C) && (23)\end{aligned}$$

   en utilisant l'associativité de xor vue pour les tables de vérité.
   Ceci est vrai pour tout élément $x \in E$, d'où l'égalité d'ensembles $\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$.
4. Soient des parties $A, B, C \subset E$. Le but est de démontrer

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C) \tag{24}$$

   Pour tout élément $x \in E$, cela revient à démontrer

$$(x \in A) \text{ et } \Big((x \in B) \text{ xor } (x \in C)\Big) \equiv \Big((x \in A) \text{ et } (x \in B)\Big) \text{ xor } \Big((x \in A) \text{ et } (x \in C)\Big) \tag{25}$$

   ce qu'on peut faire avec une table de vérité à trois lignes :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(26)

   - (1) : $(x \in B)$ xor $(x \in C)$
   - (2) : $(x \in A)$ et $\Big((x \in B)$ xor $(x \in C)\Big)$

- (3) : $(x \in A)$ et $(x \in B)$
- (4) : $(x \in A)$ et $(x \in C)$
- (5) : $\Big((x \in A) \text{ et } (x \in B)\Big)$ xor $\Big((x \in A) \text{ et } (x \in C)\Big)$

Les colonnes (2) et (5) sont les mêmes donc les assertions sont équivalentes.

5. Il faut raisonner. Il y a deux implications :
   - $\Longleftarrow$ Ce sens est facile, si $B = C$ alors $A\Delta B = A\Delta C$.
   - $\Longrightarrow$ Supposons $A\Delta B = A\Delta C$, il faut montrer que $B = C$. Il y a deux inclusions :
     - $B \subset C$: soit $x \in B$, il faut montrer $x \in C$. Alors pour utiliser l'hypothèse $A\Delta B = A\Delta C$ il y a deux cas :
       - Si $x \notin A$: alors ($x \in B$ et $x \notin A$ donc) $x \in A\Delta B$. Donc on en déduit que $x \in A\Delta C$. Mais puisque $x \notin A$ on en déduit que $x \in C$.
       - Si $x \in A$: alors ($x \in B$ et $x \in A$ donc) $x \notin A\Delta B$. Donc on en déduit que $x \notin A\Delta C$. Mais puisque $x \in A$ on en déduit que $x \in C$.

       Dans les deux cas on a bien montré $x \in C$.
     - $C \subset B$: même raisonnement, soit $x \in C$, il faut montrer $x \in B$ en utilisant l'hypothèse $A\Delta B = A\Delta C$ et il y a deux cas :
       - Si $x \notin A$, alors $x \in A\Delta C$, donc $x \in A\Delta B$, donc $x \in B$.
       - Si $x \in A$, alors $x \notin A\Delta C$, donc $x \notin A\Delta B$, donc $x \in B$.

       Dans les deux cas $x \in B$.

   On conclut alors ici $B = C$.
6. Faire un dessin.
   - (E_1) L'unique solution est clairement $X = A$. Démontrons que $A\Delta X = \emptyset \Leftrightarrow X = A$:
     - (réciproque) si $X = A$ alors on a déjà vu $A\Delta A = \emptyset$,
     - (sens direct) si $A\Delta X = \emptyset$, montrons que $X = A$: par double inclusion
       - $X \subset A$: soit $x \in X$. Alors on a deux cas, $x \in A$ ou bien $x \notin A$. Mais si on avait $x \notin A$ alors $x \in A\Delta X$, ce qui n'est pas possible… donc $x \in A$.
       - $A \subset X$: idem.

     En conclusion c'est bien $\boxed{X = A}$ l'unique solution.
   - (E_2) De même l'unique solution est clairement $X = \emptyset$ sur un dessin. Démontrons que $A\Delta X = A \Leftrightarrow X = \emptyset$:
     - (réciproque) si $X = \emptyset$ alors on a déjà vu $A\Delta\emptyset = A$,
     - (sens direct) si $A\Delta X = A$, montrons que $X = \emptyset$. Supposons qu'il existe un élément $x \in X$. Alors
       - Ou bien $x \in A$. Alors $x \notin A\Delta X$, mais ceci est A, c'est contradictoire.
       - Ou bien $x \notin A$. Alors $x \in A\Delta X$, mais cela signifie $x \in A$, encore contradictoire.

       Donc il n'existe pas de $x \in X$ donc $\boxed{X = \emptyset}$.

   Remarque : on peut aussi traiter ces équations on appliquant $-\Delta A$ des deux côtés de l'égalité :

$$A\Delta X = \emptyset \Longrightarrow (A\Delta X)\Delta A = \emptyset\Delta A \tag{27}$$

   Or par associativité (et commutativité) le terme de gauche est égal à $(A\Delta A)\Delta X$ soit $\emptyset\Delta X$ soit X, et celui de droite est égal à A. Donc on a directement l'implication $X = A$.
   De même

$$A\Delta X = A \Longrightarrow (A\Delta X)\Delta A = A\Delta A \tag{28}$$

   qui donne par suite directement $X = \emptyset$.
   C'est analogue à résoudre une équation $ax = y$ en multipliant par $\frac{1}{a}$ des deux côtés…

Exercice 3

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors de la règle de calul $(ab)^3 = a^3 b^3$ (valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$) on déduit que si on pose $a = \sqrt[3]{x}$ et $b = \sqrt[3]{y}$ on a bien $(ab)^3 = xy$ et donc ab est bien (l'unique) racine cubique de xy : $\boxed{a \times b = \sqrt[3]{xy}}$.

   Appliqué avec $x = y$, cela correspond directement à $\boxed{(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. De même, de la règle de calul $(-a)^3 = -a^3$ (valable pour tout $a \in \mathbb{R}$) on déduit que si on pose $a = \sqrt[3]{x}$ alors $(-a)^3 = -a^3 = -x$ donc $-a$ est (l'unique) racine cubique de $-x$: $\boxed{\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}}$.

3. On doit calculer A^3, connaissant la règle de calcul $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
A^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 && (29)\\
&= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^3 - 3\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2 \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} + 3\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 && (30)\\
&= (5\sqrt{2}+7) - 3\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2 \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} + 3\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2 - (5\sqrt{2}-7) && (31)\\
&= 14 - 3\times\left(\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2 \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2\right) && (32)\\
&= 14 - 3A && (33)
\end{aligned}$$

   On voit déjà apparaitre la constante 14, il reste à simplifier le terme du milieu. Or en peut en factoriser un morceau :

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2 \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2 && (34)\\
&= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\times\left(\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right) - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right) && (35)\\
&= \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}\times A && (36)
\end{aligned}$$

   (d'une part on reconnait A, d'autre part on applique la propriété des racines cubique démontrée au début). Or sous la racine cubique $(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) = (5\sqrt{2})^2 - 7^2 = 2\times 25 - 49 = 1$, puis bien sûr $\sqrt[3]{1} = 1$. En résumé on a

$$A^3 = 14 - 3A \tag{37}$$

   soit

$$\boxed{A^3 + 3A - 14 = 0} \tag{38}$$

4. Il s'agit typiquement d'un raisonnement par analyse-synthèse.

   - Analyse : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$. Développant cette dernière, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 3x - 14 &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c && (39)\\
&= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c && (40)
\end{aligned}$$

     On veut alors (a, b, c) tel que

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -14 \end{cases} \tag{41}$$

     d'où on tire rapidement $a = 1$ puis $b = 5$ puis $c = 7$ qui vérifient bien les quatre équations.

   - Synthèse : on pose $\boxed{a = 1,\ b = 5,\ c = 7}$ et on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 5x + 7) \tag{42}$$

5. On sait que A est une solution de l'équation $x^3 + 3x - 14 = 0$. Mais

$$x^3 + 3x - 14 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 + 5x + 7 = 0 \tag{43}$$

La première donne $x = 2$, quant à la deuxième $x^2 + 5x + 7 = 0$ il s'agit d'une équation de degré 2 avec discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$ donc n'adment pas de solutions réelles.
En conclusion c'est que $\boxed{A = 2}$.